Untersuchungen über das 10fach Brianchonsche Sechseck und das Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Eugen Lutz.

München 1913.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Untersuchungen über das 10fach Brianchonsche Sechseck und das Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Eugen Lutz.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

München 1913.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547407_0041

Meiner edlen Gattin Helen

gewidmet

in Dankbarkeit und Liebe.

Gliederung des Stoffes.

Seite

I. Identische Gleichungen als Hilfsmittel für projektive Untersuchungen 7

II. Definition des 10fach Brianchonschen Sechsecks 9

III. Konstruktion des 10fach Brianchonschen Sechsecks 13

IV. Anzahl und Konstruktion der 10fach Brianchonschen Sechsecke, welche durch vier Punkte bestimmt sind 15

V. Das reguläre Fünfeck und sein Mittelpunkt als 10fach Brianchonsches Sechseck 17

VI. Projektive Eigenschaften eines vollständigen 10fach Brianchonschen Sechsecks 19

VII. Das Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck. Definition und Konstruktion . . 28

VIII. Besondere Lage von Pascalschen Geraden und Pascalschen Punkten eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck 31

IX. Das vollständige Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck. Die Sätze von Steiner, Kirkmann, Cayley, Salmon, Plücker, Bauer 35

X. Die zehn Bauerschen Kegelschnitte eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck 42

I. Identische Gleichungen als Hilfsmittel für projektive Untersuchungen.

Hat man fünf beliebige Punkte i, k, l, m, n in einer Ebene, so kann man immer eine Gerade g legen durch den Schnittpunkt der Geraden mn, kl und durch den Punkt i. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & x_3^{(n)} \end{vmatrix} \equiv (x\,m\,n)$$

so ist die Gleichung der Geraden g, bezogen auf irgend ein Koordinatendreieck, die folgende:

$$\lambda_1 (x\,m\,n) + \lambda_2 (x\,k\,l) = 0$$

oder auch

$$\mu_1 (x\,i\,k) + \mu_2 (x\,i\,l) = 0.$$

Da die beiden Gleichungen dieselbe Gerade darstellen, so besteht die Identität

(1) $$\lambda_1 (x\,m\,n) + \lambda_2 (x\,k\,l) \equiv \mu_1 (x\,i\,k) + \mu_2 (x\,i\,l)$$

welche für jeden beliebigen Punkt x der Ebene gilt.

Setzt man nacheinander $x = i$, $x = k$, $x = l$, so erhält man für die Multiplikatoren λ, μ die Werte

$$\lambda_1 = \rho (i\,k\,l),\ \lambda_2 = -\rho (i\,m\,n),\ \mu_1 = \rho (l\,m\,n),\ \mu_2 = -\rho (k\,m\,n)$$

wo ρ einen beliebigen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Die Gleichung der Geraden g ist somit

$$(i\,k\,l)(x\,m\,n) - (i\,m\,n)(x\,k\,l) = 0$$

oder

$$(l\,m\,n)(x\,i\,k) - (k\,m\,n)(x\,i\,l) = 0.$$

Die Identität (1) nimmt die Form an

(1′) $$(i\,k\,l)(x\,m\,n) - (i\,m\,n)(x\,k\,l) \equiv (l\,m\,n)(x\,i\,k) - (k\,m\,n)(x\,i\,l).$$

Vertauscht man i mit m und x mit n, so ergibt sich die weitere Identität

(2) $$(m\,k\,l)(n\,i\,x) - (m\,i\,x)(n\,k\,l) \equiv (l\,i\,x)(n\,m\,k) - (k\,i\,x)(n\,m\,l).$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(i\,k\,l)(x\,m\,n) - (i\,m\,n)(x\,k\,l) = \Phi^{ix}_{kl,\ mn}$$

und nennen den Ausdruck Φ die dem Geradentripel ix, kl, mn zugeordnete Φ-Funktion. Für das Rechnen mit solchen Φ-Funktionen ergeben sich aus Vorstehendem die Regeln:

$$\Phi^{ix}_{kl,\ mn} \equiv \Phi^{kl}_{mn,\ ix} \equiv -\Phi^{mn}_{kl,\ ix} \equiv -\Phi^{ix}_{lk,\ mn}$$

1. Eine Φ-Funktion ändert ihren Wert nicht, wenn man zweimal zwei Indizespaare miteinander vertauscht.
2. Eine Φ-Funktion ändert ihr Vorzeichen, wenn man nur einmal zwei Indizespaare miteinander vertauscht.
3. Eine Φ-Funktion ändert ihr Vorzeichen, wenn man die Indizes eines Indizespaares miteinander vertauscht.

Die Gleichung der oben erwähnten Geraden g läßt sich jetzt kürzer in der Form schreiben

$$\Phi^{ix}_{kl,\ mn} = 0.$$

Wenn sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 so liegen, daß die drei Verbindungsgeraden 12, 34, 56 durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, so besteht die Beziehung

$$\Phi^{56}_{12,\ 34} = 0.$$

Und umgekehrt, wenn diese Beziehung besteht, so gehen die drei Geraden 12, 34, 56 durch einen und denselben Punkt hindurch; denn die vorstehende Gleichung sagt aus, daß der Punkt 6 auf der

Geraden $\Phi^{5x}_{12,\,34} = 0$ liegt, welche durch den Punkt 12×34 und den Punkt 5 hindurchgeht. Wir haben somit den Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei Verbindungsgeraden 12, 34, 56 von sechs Punkten 1, 2, . . . 6 durch einen und denselben Punkt gehen, ist das Verschwinden der Φ-Funktion $\Phi^{56}_{12,\,34}$.

Die Bedingung $\Phi^{56}_{12,\,34} = 0$ läßt sich noch in anderer Form darstellen, die wir später zu benützen haben werden. Multipliziert man die beiden Seiten der Bedingungsgleichung

A) $$(512)\,(634) = (612)\,(534)$$

mit (634) und wendet man zwecks weiterer Umformung die beiden Identitäten

$$\Phi^{56}_{24,\,34} \equiv \Phi^{34}_{56,\,24}, \qquad \Phi^{56}_{12,\,14} \equiv \Phi^{14}_{56,\,12}$$

an, so ergibt sich die Beziehung

B) $$(124)\,(346)\,(562) = (324)\,(546)\,(162)$$

aus der man durch die Vertauschungen $1-2$, $3-4$, $5-6$ die weiteren drei Beziehungen ableitet

C) $$(214)\,(346)\,(561) = (314)\,(546)\,(261)$$

D) $$(123)\,(436)\,(562) = (423)\,(536)\,(162)$$

E) $$(124)\,(345)\,(652) = (324)\,(645)\,(152).$$

Die Bedingung A läßt sich durch irgend eine der vorstehenden vier Bedingungen ersetzen; denn, wenn eine derselben besteht, so besteht auch die Bedingung A. Man zeigt sehr leicht, daß die Gleichungen B) C) D) E) der analytische Ausdruck dafür sind, daß in den zum Tripel 12, 34, 56 gehörigen vier Paaren perspektiver Dreiecke

135	235	145	136
246	146	236	245

die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer und derselben Geraden liegen. Vertauscht man in einer jeden der vier Gleichungen B) . . E) 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6, so resultieren noch die folgenden vier Beziehungen, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, wie die Gleichungen B) . . E), aus denen sie hergeleitet wurden und diese daher ersetzen können.

(B') $$(213)\,(435)\,(651) = (413)\,(635)\,(251)$$

(C') $$(123)\,(435)\,(652) = (423)\,(635)\,(152)$$

(D') $$(214)\,(345)\,(651) = (314)\,(645)\,(251)$$

(E') $$(213)\,(436)\,(561) = (415)\,(546)\,(261)$$

Welche Lage auch sechs Punkte 1, 2, . . . 6 einer Ebene haben mögen, es gilt allgemein die Identität:

$$\alpha)\quad \Phi^{56}_{12,\,34} + \Phi^{25}_{34,\,16} + \Phi^{46}_{23,\,15} \equiv \Phi^{42}_{36,\,15}$$

welche man leicht bestätigen kann.

Vertauscht man in vorstehender Identität nacheinander

β) 2 mit 3 und 5 mit 6
γ) 1 mit 2 und 5 mit 6
δ) 1 mit 3 und 2 mit 5
ε) 4 mit 5 und 6 mit 3
φ) 2 mit 5 und 6 mit 4

so erhält man noch die weiteren fünf Identitäten:

$$\beta)\quad \Phi^{65}_{13,\,24} + \Phi^{36}_{24,\,15} + \Phi^{45}_{32,\,16} \equiv \Phi^{43}_{25,\,16}$$

$$\gamma)\quad \Phi^{65}_{21,\,34} + \Phi^{16}_{34,\,25} + \Phi^{45}_{13,\,26} \equiv \Phi^{41}_{35,\,26}$$

$$\delta)\quad \Phi^{26}_{35,\,14} + \Phi^{52}_{14,\,36} + \Phi^{46}_{51,\,32} \equiv \Phi^{45}_{16,\,32}$$

$$\varepsilon)\quad \Phi^{43}_{12,\,65} + \Phi^{24}_{65,\,13} + \Phi^{53}_{26,\,14} \equiv \Phi^{52}_{43,\,14}$$

$$\varphi)\quad \Phi^{24}_{15,\,36} + \Phi^{52}_{36,\,14} + \Phi^{64}_{53,\,12} \equiv \Phi^{65}_{34,\,12}.$$

II. Definition des 10fach Brianchonschen Sechsecks.

Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß im Sechseck von sechs Punkten 1, 2, . . . 6 nie drei Punkte in gerader Linie liegen und die folgenden Tripel von Verbindungsgeraden je einen Punkt gemein haben.[1])

T_1: 16, 25, 34
T_2: 15, 23, 46
T_3: 13, 24, 56
T_4: 12, 34, 56.

Alsdann verschwinden die vier Φ-Funktionen

$$\Phi^{16}_{25,\,34},\quad \Phi^{15}_{23,\,46},\quad \Phi^{13}_{24,\,56},\quad \Phi^{12}_{34,\,56}.$$

Auf Grund der am Schluß des vorhergehenden Kapitels abgeleiteten sechs Identitäten $\alpha) \ldots \varphi)$ verschwinden dann aber auch die folgenden sechs Φ-Funktionen

$$\Phi^{12}_{35,\,46},\quad \Phi^{13}_{26,\,45},\quad \Phi^{16}_{23,\,45},\quad \Phi^{15}_{24,\,36},\quad \Phi^{14}_{25,\,36},\quad \Phi^{14}_{26,\,35}$$

und es ergeben sich somit noch die folgenden sechs Tripel T:

T_5: 12, 35, 46
T_6: 13, 26, 45
T_7: 16, 23, 45
T_8: 15, 24, 36
T_9: 14, 25, 36
T_{10}: 14, 26, 35.

Das von uns definierte Sechseck enthält 15 Tripel von Verbindungsgeraden, die keine Ecke gemein haben; außer den zehn genannten sind demnach noch die folgenden fünf vorhanden:

12, 45, 36
13, 25, 46
14, 23, 56
15, 26, 34
16, 24, 35.

Man zeigt leicht, daß für jedes dieser Tripel ik, lm, np die Beziehung

$$(ilm)(knp) + (klm)(inp) = 0$$

besteht und folglich die dem Tripel zugeordnete Φ-Funktion $\Phi^{ik}_{lm,\,np}$ nicht verschwinden kann, da nach Voraussetzung nie drei Ecken in gerader Linie liegen. Die Existenz der Tripel T_6 und T_7 z. B. bedingt die beiden Gleichungen $\Phi^{13}_{45,\,26} = 0$, $\Phi^{23}_{45,\,16} = 0$, aus denen die Beziehung $(145)(236) + (245)(136) = 0$ folgt. Die Φ-Funktion $\Phi^{12}_{45,\,36}$ kann folglich nicht verschwinden.

Drei Tripel T, welche die gleiche Verbindungsgerade ik enthalten, können daher gleichzeitig nicht auftreten. Jede Verbindungsgerade ik kommt zweimal und nur zweimal in den zehn Tripeln T vor.

Es resultiert der Satz:

I. Wenn in einem Sechseck 1, 2, . . . 6, in dem nie drei Ecken in gerader Linie liegen, viermal je drei Diagonalen, die keine Ecke gemein haben, durch einen und denselben Punkt hindurchgehen und wenn diese vier Diagonalen-Tripel voneinander unabhängig sind, d. h. keines durch zwei der übrigen oder die drei übrigen mitbestimmt ist, so gehen außerdem noch sechsmal je drei Diagonalen der bezeichneten Art durch einen und denselben Punkt hindurch.

Zu einem jeden der zehn Tripel T_1, T_2, . . . T_{10} gehört ein und nur ein Kegelschnitt, der sechs Verbindungsgeraden ik des vollständigen Sechsecks 1, 2, . . . 6 zu Tangenten hat. Dem Tripel $T_4 = (12, 34, 56)$ z. B. entspricht das Brianchonsche Sechsseit

I = 13, II = 35, III = 52, IV = 24, V = 46, VI = 61

---

[1]) Um uns kurz ausdrücken zu können, bezeichnen wir künftig jedes Tripel von drei Verbindungsgeraden, die einen und denselben Punkt gemein haben, mit T und schreiben $T_1 = (16, 25, 34)$, oder, wenn der Schnittpunkt hervorgehoben werden soll, $T_1 = (16 \times 25 \times 34)$.

und der Kegelschnitt $K_{12,\,34,\,56}$, der diese sechs Verbindungsgeraden zu Tangenten hat. Die drei übrigen Brianchonschen Sechsseite, die zum gleichen Tripel T_4 gehören:

$$13 - 36 - 62 - 24 - 45 - 51$$
$$14 - 45 - 52 - 23 - 36 - 61$$
$$14 - 46 - 62 - 23 - 35 - 51$$

enthalten je die Tripel T_6, T_3, T_{10}; die zugehörigen Kegelschnitte sind somit zerfallen.

Das Sechseck 1, 2, . . . 6 enthält somit zehn Brianchonsche Sechsseite und heißt daher ein 10fach Brianchonsches Sechseck.[1])

Die zehn Brianchonschen Sechsecke sind die folgenden:

$$B_1 = 12 - 23 - 36 - 65 - 54 - 41$$
$$B_2 = 12 - 24 - 45 - 53 - 36 - 61$$
$$B_3 = 12 - 26 - 63 - 34 - 45 - 51$$
$$B_4 = 13 - 35 - 52 - 24 - 46 - 61$$
$$B_5 = 14 - 43 - 32 - 26 - 65 - 51$$
$$B_6 = 14 - 42 - 23 - 35 - 56 - 61$$
$$B_7 = 13 - 34 - 46 - 62 - 25 - 51$$
$$B_8 = 13 - 32 - 25 - 56 - 64 - 41$$
$$B_9 = 15 - 53 - 34 - 42 - 26 - 61$$
$$B_{10} = 12 - 25 - 54 - 46 - 63 - 31.$$

Aus den vorstehenden Untersuchungen folgt, daß ein 10fach Brianchonsches Sechseck vollkommen definiert ist, wenn sechs Punkte 1, 2, . . . 6 einer Ebene so gewählt werden, daß nie drei in gerader Linie liegen und die vier folgenden Tripel von Geraden je durch einen und denselben Punkt gehen:

$$T_1: \; 16,\; 25,\; 34$$
$$T_2: \; 15,\; 23,\; 46$$
$$T_3: \; 13,\; 24,\; 56$$
$$T_4: \; 12,\; 34,\; 56.$$

Diese Definition können wir als die allgemeinste ansehen. Durch passende Numerierung der Ecken eines 10fach Brianchonschen Sechsecks können wir es stets erreichen, daß vier charakteristische Geradentripel T desselben mit den oben genannten T_i übereinstimmen.

Die Geradentripel T_5, T_6, . . . T_{10} können wir aus den vier ersten T_1, T_2, T_3, T_4 noch auf anderem Weg ableiten. Wir suchen einen Kegelschnitt, der eine polare Zuordnung vermittelt zwischen den Ecken des Sechsecks 1, . . . 6 und bestimmten Verbindungsgeraden ik. Wir gehen von einem der vier Tripel, etwa vom Tripel $T_1 = (16, 25, 34)$, d. h. von den beiden perspektiven Dreiecken $\left\{\begin{matrix} 1\,2\,3 \\ 6\,5\,4 \end{matrix}\right.$ aus und untersuchen, ob es einen Kegelschnitt $\Omega^{1\,2\,3}_{6\,5\,4}$ gibt derart, daß er einer Ecke des einen Dreiecks die Gegenseite der entsprechenden Ecke des anderen Dreiecks als Polare zuordnet. Nehmen wir das Dreieck 1 2 3 als Koordinatendreieck, so können wir die Gleichung des Kegelschnitts in der Form ansetzen:

$$a_{11}(x\,23)^2 + 2\,a_{12}(x\,23)(x\,31) + a_{22}(x\,31)^2 + 2\,a_{13}(x\,23)(x\,12) + 2\,a_{23}(x\,31)(x\,12) + a_{33}(x\,12)^2 = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\varphi_1(x) \equiv a_{11}(x\,23) + a_{12}(x\,31) + a_{13}(x\,12)$$
$$\varphi_2(x) \equiv a_{21}(x\,23) + a_{22}(x\,31) + a_{23}(x\,12), \quad a_{ik} = a_{ki}$$
$$\varphi_3(x) \equiv a_{31}(x\,23) + a_{32}(x\,31) + a_{33}(x\,12)$$

Die Gleichung der Polaren des Punktes i ist somit:

$$\pi_i(x) \equiv \varphi_1(i)(x\,23) + \varphi_2(i)(x\,31) + \varphi_3(i)(x\,12) = 0$$

also die Gleichung der Polaren des Punktes 1: $\pi_1(x) \equiv a_{11}(x\,23) + a_{12}(x\,31) + a_{13}(x\,12) = 0$,
" " " " " " " 2: $\pi_2(x) \equiv a_{12}(x\,23) + a_{22}(x\,31) + a_{23}(x\,12) = 0$,
" " " " " " " 3: $\pi_3(x) \equiv a_{13}(x\,23) + a_{23}(x\,31) + a_{33}(x\,12) = 0$.

[1]) Nach Clebsch, der es studierte (Math. Annalen, Bd. 18 und Clebsch-Lindemann, Geometrie, Bd. I, 2. Aufl.).

Die Polare von 1 ist die Gerade 45, die Polare von 2 ist die Gerade 46 und die Polare von 3 ist die Gerade 56; es müssen somit die folgenden sechs Identitäten bestehen:

$$\pi_1(4) = 0, \quad \pi_1(5) = 0; \quad \pi_2(4) = 0, \quad \pi_2(6) = 0; \quad \pi_3(5) = 0, \quad \pi_3(6) = 0.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_{ik} haben wir somit die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{11}(423) + a_{12}(431) + a_{13}(412) &= 0\\
a_{11}(523) + a_{12}(531) + a_{13}(512) &= 0\\
a_{12}(423) + a_{22}(431) + a_{23}(412) &= 0\\
a_{12}(623) + a_{22}(631) + a_{23}(612) &= 0\\
a_{13}(523) + a_{23}(531) + a_{33}(512) &= 0\\
a_{13}(623) + a_{23}(631) + a_{33}(612) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ik} haben somit die Werte:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda(145) & a_{12} &= \lambda(245) & a_{13} &= \lambda(345)\\
a_{12} &= \rho(146) & a_{22} &= \rho(246) & a_{23} &= \rho(346)\\
a_{13} &= \sigma(156) & a_{23} &= \sigma(256) & a_{33} &= \sigma(356)
\end{aligned}$$

und es bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \lambda(245) = \rho(146)\\
a_{13} &= \lambda(345) = \sigma(156)\\
a_{23} &= \rho(346) = \sigma(256)
\end{aligned}$$

aus denen die einzige Bedingungsgleichung

$$(146)(265)(354) = (346)(165)(254)$$

sich ergibt, die sich leicht mit Hilfe der im Kapitel I abgeleiteten identischen Gleichungen in die einfachere

$$\Phi^{34}_{16,\,25} = 0$$

überführen läßt. Nach Voraussetzung ist aber diese Bedingung erfüllt, da die drei Verbindungsgeraden 16, 25, 34 durch einen und denselben Punkt hindurchgehen (Kap. I). Damit ist bewiesen, daß ein Kegelschnitt der bezeichneten Art tatsächlich existiert.

Für die Koeffizienten a_{ik} ergeben sich aus obigen Entwicklungen die Werte:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= k(145)(156)(346), & a_{12} &= k(146)(256)(345), & a_{13} &= k(345)(156)(346)\\
a_{22} &= k(246)(256)(345), & a_{23} &= k(256)(345)(346), & a_{33} &= k(356)(345)(346)
\end{aligned}$$

wo k einen beliebigen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts ist somit die folgende:

$$\left.\begin{aligned}\Omega^{123}_{654} = {} & (145)(156)(346)(x\,23)^2 + 2(146)(256)(345)(x\,23)(x\,31) + (246)(256)(345)(x\,31)^2\\ & + 2(345)(156)(346)(x\,23)(x\,12) + 2(256)(345)(346)(x\,31)(x\,12) + (356)(345)(346)(x\,12)^2\end{aligned}\right\} = 0$$

sie läßt sich auch in andere Formen überführen.

Es ergibt sich der Satz:

II. Zwei perspektive Dreiecke lassen sich durch einen Kegelschnitt einander polar so zuordnen, daß jede Ecke des einen Dreiecks die der entsprechenden Ecke des anderen Dreiecks gegenüberliegende Seite zur Polaren hat.

Aus diesem Satz und der Polarentheorie folgt sofort der sogenannte Desarguesche Satz über perspektive Dreiecke:

Die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspektiver Dreiecke liegen auf einer und derselben Geraden, der Perspektivitätsachse der beiden Dreiecke.

Dem Perspektivitätszentrum zweier perspektiver Dreiecke entspricht in Bezug auf den zuordnenden Ω-Kegelschnitt als Polare die Perspektivitätsachse der beiden Dreiecke.

Zum Tripel $T_1 = (16, 34, 25)$ gehören außer den beiden genannten perspektiven Dreiecken $\begin{cases} 1\,2\,3 \\ 6\,5\,4 \end{cases}$ noch die folgenden drei Paare perspektiver Dreiecke:

$$\begin{array}{ccc} 6\,2\,3 & 1\,5\,3 & 1\,2\,4 \\ 1\,5\,4 & 6\,2\,4 & 6\,5\,3 \end{array}$$

denen die Ω-Kegelschnitte

$$\Omega_{154}^{623} = 0, \qquad \Omega_{624}^{153} = 0, \qquad \Omega_{653}^{124} = 0$$

entsprechen. Man sieht, wie man durch passende Ziffern-Vertauschungen die vorstehenden drei Gleichungen in entwickelter Form aus der Gleichung $\Omega_{654}^{123} = 0$ erhält.

III. Zu jedem Tripel $T = (ik, lm, np)$ gehören vier zuordnende Kegelschnitte Ω, welche den vier perspektiven Dreiecken entsprechen, welche die sechs Punkte i, k, . . . p bestimmen.

Um nun die Existenz der sechs Tripel $T_5, \ldots T_{10}$ zu erweisen, wenn die vier Tripel T_1, T_2, T_3, T_4 bestehen, polarisieren wir die Geraden ik, lm, np eines jeden Tripels an einem der 16 Ω-Kegelschnitte, die zu den vier Tripeln $T_1, \ldots T_4$ gehören. Durch Polarisation von $T_2 = (15, 23, 46)$ am Kegelschnitt Ω_{654}^{123} erhält man das Tripel der drei Punkte (54×13), 6, 2, welche nach bekanntem Satz der Polarentheorie in gerader Linie liegen; damit ist aber die Existenz des Geradentripels $T_6 = (13, 26, 45)$ bewiesen. Um kurz anzudeuten, daß das Tripel T_6 aus den beiden Tripeln T_1 und T_2 durch Polarisation von T_2 an einem der vier Ω-Kegelschnitte von T_1 hervorgeht, schreiben wir

$$T_6 = T_1\,T_2.$$

Man bestätigt nun leicht die weiteren Beziehungen

$$\begin{aligned} T_8 &= T_4\,T_6 = T_4\,(T_1\,T_2) \\ T_5 &= T_1\,T_3 \\ T_9 &= T_2\,T_3 \\ T_{10} &= T_2\,T_4 \\ T_7 &= T_9\,T_4 = (T_2\,T_3)\,T_4. \end{aligned}$$

Damit ist auf eine zweite Art der Satz I dieses Kapitels bewiesen und zugleich ergibt sich die wichtige Tatsache, daß jedes Tripel T durch projektive Transformation aus irgend einem der übrigen und folglich auch jedes Brianchonsche Sechsseit B durch projektive Transformation aus irgend einem der übrigen abgeleitet werden kann. Man bemerkt leicht, daß die Transformation $T_1\,T_2$ auch dadurch erreicht werden kann, daß man im Tripel T_2 je zwei Ziffern, welche die zwei Punkte je einer Verbindungsgeraden im Tripel T_1 bezeichnen, miteinander vertauscht, also in $T_2 = (15, 23, 46)$ die Vertauschungen $1 - 6$, $2 - 5$, $3 - 4$ vornimmt. Wir können daher die Transformation $T_6 = T_1\,T_2$ symbolisch auch so ausdrücken:

$$T_6 = (13, 26, 45) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 6\,5\,4 \end{pmatrix} (15, 23, 46).$$

Die den übrigen fünf Relationen entsprechenden sind dann:

$$T_8 = (15, 24, 36) = \begin{pmatrix} 1\,3\,5 \\ 2\,4\,6 \end{pmatrix} (13, 26, 45)$$

$$T_5 = (12, 35, 46) = \begin{pmatrix} 1\,3\,2 \\ 6\,4\,5 \end{pmatrix} (13, 24, 56)$$

$$T_9 = (14, 25, 36) = \begin{pmatrix} 1\,2\,4 \\ 5\,3\,6 \end{pmatrix} (13, 24, 56)$$

$$T_{10} = (14, 26, 35) = \begin{pmatrix} 1\,2\,4 \\ 5\,3\,6 \end{pmatrix} (12, 34, 56)$$

$$T_7 = (16, 23, 45) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \end{pmatrix} (12, 34, 56).$$

III. Konstruktion des 10fach Brianchonschen Sechsecks.

Um die Konstruktion eines 10fach Brianchonschen Sechsecks zu ermöglichen, nehmen wir drei seiner Ecken, etwa 1, 2, 3 als Fundamentalpunkte eines Koordinatendreiecks. Haben die drei Verbindungsgeraden 23, 31, 12 in Bezug auf irgend ein Parallelkoordinatensystem die Gleichungen

$$A_i x + B_i y + C_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

so sind die projektiven Koordinaten x_i eines Punktes P (x, y) definiert durch die drei Gleichungen

$$\rho x_i = k_i (A_i x + B_i y + C_i) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Durch passende Wahl der Konstanten k_i kann man es stets erreichen, daß zwei Geraden, welche je durch die Ecken 1 und 2 hindurchgehen, die einfachen Gleichungsformen $x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$ annehmen. Wir können daher die Gleichungen der Verbindungsgeraden 23, 31, 12, 14, 24 wie folgt ansetzen:

$$\overline{23}: x_1 = 0, \quad \overline{31}: x_2 = 0, \quad \overline{12}: x_3 = 0, \quad \overline{14}: x_2 + x_3 = 0, \quad \overline{24}: x_1 + x_3 = 0.$$

Für den Punkt 4 erhält man aus den beiden letzten Gleichungen die Koordinaten 1, 1, -1 und die Gerade 34 hat somit die Gleichung

$$\overline{34}: x_1 - x_2 = 0.$$

Die Geraden 25 und 16 haben Gleichungen von der Form:

$$\overline{25}: x_1 + \mu x_3 = 0$$
$$\overline{16}: x_2 + \nu x_3 = 0.$$

Da nach Voraussetzung die drei Geraden 34, 25, 16 durch einen und denselben Punkt gehen, so folgt $\nu = \mu$.

Die Gerade 56 gehört zugleich den Tripeln $T_4 = (12, 34, 56)$ und $T_3 = (13, 24, 56)$ an, läßt sich daher in den Formen darstellen:

$$\overline{56} \begin{cases} x_1 - x_2 + \rho x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

Da die linken Seiten dieser beiden Gleichungen sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden können, ergibt sich $\rho = -\lambda = 1$ und die Gleichung der $\overline{56}$ ist somit

$$\overline{56}: x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen von $\overline{25}$ und $\overline{56}$ ergeben sich für die Ecke 5 die Koordinaten μ, $\mu - 1$, -1 und aus den Gleichungen von $\overline{16}$ und $\overline{56}$ für die Ecke 6 die Koordinaten $\mu + 1$, μ, -1.

Wir haben bei Ableitung der vorstehenden Gleichungen bereits die drei Tripel T_1, T_3, T_4 berücksichtigt; wir haben noch $T_2 = (15, 23, 46)$ zu befriedigen. Die Gleichungen von $\overline{15}$ und $\overline{46}$ sind:

$$\overline{15}: \qquad x_2 + (\mu - 1) x_3 = 0$$
$$\overline{46}: (\mu - 1) x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0.$$

Aus der Bedingung, daß die drei Geraden 15, 23, 46 durch einen und denselben Punkt gehen müssen, ergibt sich die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \mu - 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \mu - 1 & -\mu & -1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\mu^2 - \mu - 1 = 0$$

und folglich

$$\mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Das Verhältnis zwischen einer Strecke und ihrem goldenen Schnitt, oder das Verhältnis zwischen der Seite s und der Diagonale d eines regulären Fünfecks hat bekanntlich den Wert:

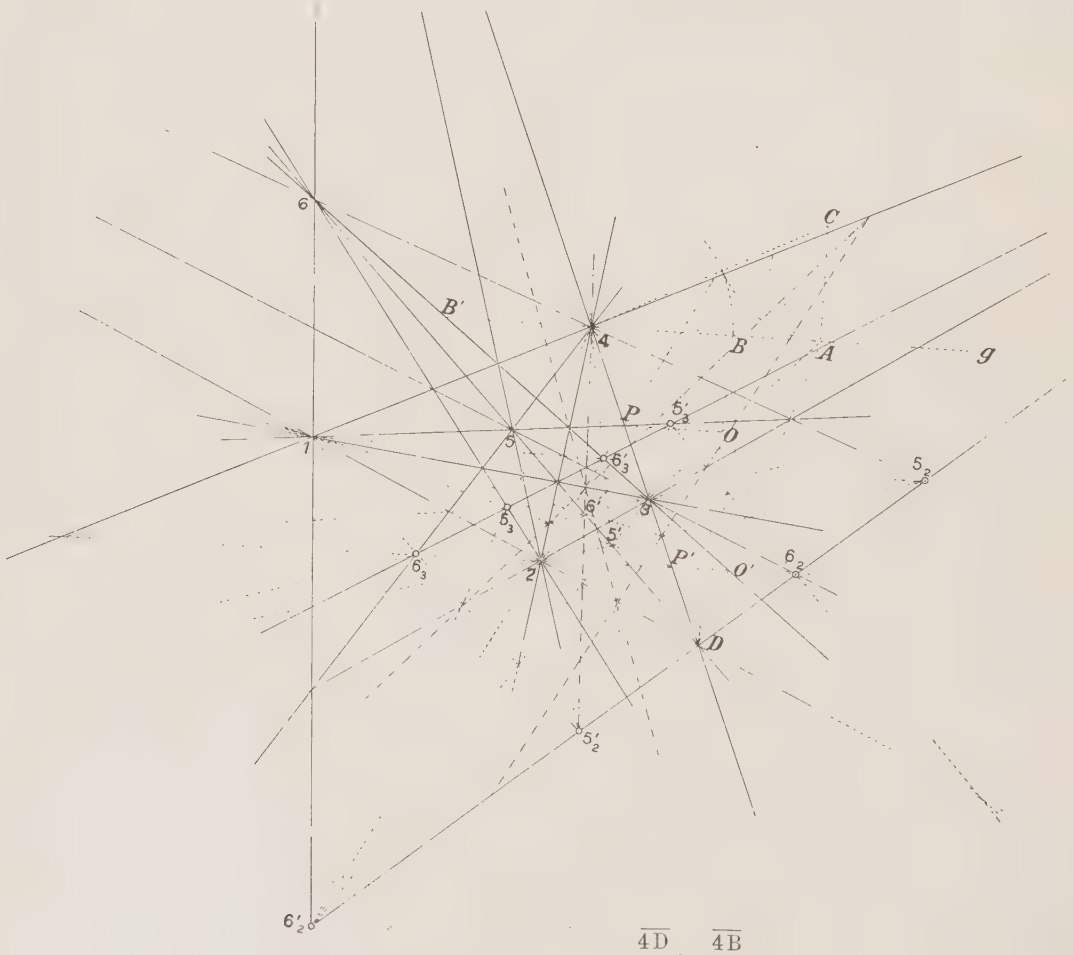
$$\frac{s}{d} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ und somit } \frac{d}{s} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Also ist $\mu = \frac{d}{s}$ oder $= -\frac{s}{d}$. Wir wollen künftig das positive Verhältnis $\frac{d}{s}$ mit μ und das negative $-\frac{s}{d}$ mit μ' bezeichnen; alsdann ist $\mu + \mu' = 1$.

Das Doppelverhältnis $\delta = (12, 13, 14, 15)$ hat den Wert $\frac{1}{\mu}$ und ist somit gleich $\frac{s}{d}$ oder $-\frac{d}{s}$.

Aus vorstehenden Resultaten erhellt, daß wir aus vier beliebigen Punkten, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, zwei 10fach Brianchonsche Sechsecke, die die Tripel $T_1, T_2, \ldots T_{10}$ enthalten, konstruieren können. Es genügt, nach Annahme der vier Punkte 1, 2, 3, 4, die $\overline{12}$ mit der $\overline{34}$ im Punkte D zum Schnitt zu bringen und gemäß der Relation $(D, 3, 4, P) = (12, 13, 14, 15) = \frac{s}{d}$ bezw. $-\frac{d}{s}$ auf 34 den Punkt P zu bestimmen. Der Punkt 5 liegt dann auf $\overline{1P}$ und außerdem auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $\overline{12} \times \overline{34}$ und $\overline{13} \times \overline{24}$. Die Ecke 6 liegt auf $\overline{D5}$ und wird gefunden, indem man irgend ein Tripel T, das eine durch 6 und eine der vier Ecken 1, 2, 3, 4 gehende Gerade enthält, fertig konstruiert, etwa das Tripel 16, 25, 34 oder 26, 14, 35. Wie zu drei Punkten einer Geraden der vierte Punkt konstruiert wird, der mit den gegebenen drei ein vorgegebenes Doppelverhältnis bestimmt, lehrt die elementare projektive Geometrie.

Die folgende Figur zeigt, wie die Konstruktion durchgeführt wird und ist gleichzeitig eine empirische Probe für die Richtigkeit der bisherigen Untersuchungen. Die dem Doppelverhältnis $-\frac{d}{s}$ entsprechenden Punkte sind durch Strich gekennzeichnet.



g ist eine beliebige Gerade, die durch den Punkt 4 geht.
$\overline{4A} = 2\overline{AC} = d$, $AC \perp 4A$
$\overline{4B} = \overline{4C} - \overline{AC} = s$, $\overline{B'4} = \overline{4B} = s$
$\therefore$ 4B goldener Schnitt von $\overline{4A}$. $O \equiv \overline{A3} \times BD$
$PO \parallel 4A$

$$\frac{\overline{4D}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{4B}}{\overline{PO}}$$
$$\frac{\overline{43}}{\overline{P3}} = \frac{\overline{4A}}{\overline{PO}}$$
$$\therefore \frac{\overline{D4}}{\overline{43}} : \frac{\overline{DP}}{\overline{P3}} = (D\,3\,4\,P) = \frac{\overline{4B}}{\overline{4A}} = \frac{s}{d} = \frac{1}{\mu}.$$

Ein 10fach Brianchonsches Sechseck ist, wie aus obigen Entwicklungen hervorgeht, analytisch definiert durch

die sechs Punkte:				oder durch die sechs Geradenpaare:	
1)	1,	0,	0	$x_2 = 0,$	$x_3 = 0$
2)	0,	1,	0	$x_1 = 0,$	$x_3 = 0$
3)	0,	0,	1	$x_1 = 0,$	$x_2 = 0$
4)	1,	1,	-1	$x_2 + x_3 = 0,$	$x_1 + x_3 = 0$
5)	μ,	$\mu - 1$,	-1	$\mu x_2 + x_3 = 0,$	$x_1 + \mu x_3 = 0$
6)	$\mu + 1$,	μ,	-1	$x_2 + \mu x_3 = 0,$	$x_1 - \mu x_2 + 0$

oder auch, wenn man den Wert $\mu' = 1 - \mu$ in Betracht zieht, durch

die sechs Punkte:				oder durch die sechs Geradenpaare:	
1)	1,	0,	0	$x_2 = 0,$	$x_3 = 0$
2)	0,	1,	0	$x_1 = 0,$	$x_3 = 0$
3)	0,	0,	1	$x_1 = 0,$	$x_2 = 0$
4)	1,	1,	-1	$x_2 + x_3 = 0,$	$x_1 + x_3 = 0$
5')	$\mu - 1$,	μ,	1	$x_2 - \mu x_3 = 0,$	$\mu x_1 - x_3 = 0$
6')	$1 - \mu$,	1,	μ	$\mu x_2 - x_3 = 0,$	$\mu x_1 + x_2 = 0$

Das erste Sechseck E ist vom zweiten E' in prospektiver Hinsicht nicht verschieden, denn es läßt sich durch eine lineare Transformation

$$\rho x_i = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik} x_k' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

in das zweite überführen. Wir können die beiden Sechsecke einander so zuordnen, daß sich projektiv entsprechen die Ecken:

1	$4' = 4$
2	$5'$
3	$6'$
4	$1' = 1$
5	$2' = 2$
6	$3' = 3$

Die Transformationskoeffizienten a_{ik} haben in diesem Falle die Werte

$$a_{11} = \mu \qquad a_{12} = -\mu \qquad a_{13} = \mu$$
$$a_{21} = \mu \qquad a_{22} = 1 - \mu \qquad a_{23} = 1$$
$$a_{31} = -\mu \qquad a_{32} = 1 \qquad a_{33} = 1 - \mu$$

Es resultieren die beiden projektiven Strahlenbüschel

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16 \quad \text{und} \quad 4'5',\ 4'6',\ 4'1'\ 4'2',\ 4'3'$$

welche außerdem perspektiv sind, da die Punkte 1, 1' und 4, 4' identisch sind und somit der Verbindungsstrahl der Büschelmittelpunkte 1 und 4' sich selbst entspricht. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, d. h. die Punkte

$$12 \times 45', \qquad 13 \times 46', \qquad 15 \times 42, \qquad 16 \times 43$$

liegen somit auf einer und derselben Geraden (Perspektivitätsachse), die Punkte 5' und 6' lassen sich daher leicht konstruieren. Damit ist die Konstruktion des zweiten 10fach Brianchonschen Sechsecks auf die des ersten zurückgeführt und die projektive Zuordnung zwischen den beiden Figuren auch in konstruktiver Hinsicht erledigt. (Fig. S. 14.)

IV. Anzahl und Konstruktion der 10fach Brianchonschen Sechsecke, die durch vier Punkte bestimmt sind.

Es drängt sich die Frage auf: Wieviele 10fach Brianchonsche Sechsecke sind durch vier Punkte bestimmt? Es ist klar, daß die fünfte und sechste Ecke eines jeden der möglichen 10fach Brianchonschen Sechsecke auf einer der drei Diagonalen

$$12 \times 34 \rightarrow 13 \times 24$$
$$12 \times 34 \rightarrow 14 \times 23$$
$$13 \times 24 \rightarrow 14 \times 23$$

des vollständigen Vierecks 1 2 3 4 liegen muß. Entsprechend den Werten μ und μ' sind somit $3 \cdot 2 = 6$ 10fach Brianchonsche Sechsecke der besagten Art möglich. Die drei dem Wert μ entsprechenden sind die folgenden:

E_1			E_2			E_3		
16	25	34	16_2	25_2	34	16_3	45_3	23
15	23	46	15_2	24	36_2	15_3	34	26_3
13	24	56	14	23	$5_2 6_2$	13	24	$5_3 6_3$
12	34	56	12	34	$5_2 6_2$	14	23	$5_3 6_3$
12	35	46	12	45_2	36_2	14	35_3	26_3
13	26	45	14	26_2	35_2	13	46_3	25_3
16	23	45	16_2	24	35_2	16_3	34	25_3
15	24	36	15_2	23	46_2	15_3	24	36_3
14	25	36	13	25_2	46_2	12	45_3	36_3
14	26	35	13	26_2	45_2	12	46_3	35_3

Die Sechsecke E_2 und E_3 gehen aus dem Sechseck E_1 hervor, indem man bezw. 3 mit 4 und 2 mit 4 vertauscht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man die Ecken des Vierecks 1 2 3 4 in folgender Weise einander projektiv zuordnet:

E_1	E_2		E_1	E_3
1	1		1	1
2	2		2	4
3	4		3	3
4	3		4	2
5	5_2		5	5_3
6	6_2		6	6_3

Bezeichnet man die Koordinaten der Ecken von E_1, bezogen auf das Dreieck 1 2 3, mit x_i und diejenigen der Ecken der Sechsecke E_2 und E_3 in Bezug auf dasselbe Dreieck mit x_i', so sind die Transformationsformeln in den beiden Fällen die folgenden:

$E_1 \rightarrow E_2$	$E_1 \rightarrow E_3$
$\rho x_1' = x_1 + x_3$	$\rho x_1' = x_1 - x_2$
$\rho x_2' = x_2 + x_3$	$\rho x_2' = -x_2$
$\rho x_3' = -x_3$	$\rho x_3' = x_2 + x_3$

Substituiert man für die x_i die auf S. 15 angegebenen Koordinaten der Ecken 5 und 6, so resultieren für die Koordinaten der Ecken 5_2 und 6_2 einerseits und der Ecken 5_3 und 6_3 andererseits die Werte:

5_2)	μ,	-1,	$\mu + 1$	5_3)	$-(\mu + 1)$,	μ,	1
6_2)	μ,	$\mu - 1$,	1	6_3)	1,	$-\mu$,	$\mu - 1$

Aus den Sechsecken E_2 und E_3 ergeben sich zwei weitere E_2' und E_3', wenn wir an Stelle von $\mu = \frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}$ den Wert $\mu' = -\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} = 1 - \mu$ setzen. Die fünften und sechsten Ecken dieser beiden Sechsecke haben somit die Koordinaten:

$5_2'$)	$1 - \mu$,	-1,	$2 - \mu$	$5_3'$)	$\mu - 2$,	$1 - \mu$,	1
$6_2'$)	$1 - \mu$,	$-\mu$,	1	$6_3'$)	1,	$\mu - 1$,	$-\mu$

Damit sind die sechs möglichen 10fach Brianchonschen Sechsecke, welche durch vier Punkte bestimmt sind, analytisch definiert.

Es erübrigt noch, die Frage zu entscheiden: Wie gewinnen wir konstruktiv aus E_1 die fünften und sechsten Ecken der vier Sechsecke E_2, E_3, E_2', E_3'?

Aus der oben angegebenen projektiven Beziehung zwischen E_1 und E_2 einerseits und E_1 und E_3 andererseits folgt sofort, daß die Punkte $35 \times 45_2$, $36 \times 46_2$ auf der Geraden 12 und die Punkte $25 \times 45_3$, $26 \times 46_3$ auf der Geraden 13 liegen. Da das Tripel $T_5 = 12 \times 35 \times 46$ besteht, so liegt 5_2 auf 46, die Verbindungsgerade 45_2 ist somit mit der 46 identisch und da das Tripel $12 \times 45_2 \times 36_2 = 12 \times 46 \times 36_2 = 12 \times 46 \times 35$ besteht, so liegt 6_2 auf 35. Analog beweist man, daß die Punkte 5_3 und 6_3 bezw. auf den Verbindungsgeraden 26 und 45 liegen. Weitere geometrische Örter

für 5_2 und 6_2 einerseits und 5_3 und 6_3 andererseits sind die Verbindungsgeraden $12 \times 34 \rightarrow 14 \times 23$ und $13 \times 24 \rightarrow 14 \times 23$. Damit sind die Ecken 5_2 und 6_2, 5_3 und 6_3 auf zweifache Art konstruktiv bestimmt.

Um endlich noch die Ecken $5_2'$, $6_2'$ und $5_3'$, $6_3'$ zu konstruieren, erinnern wir uns, wie wir aus E_1 konstruktiv E_1' abgeleitet haben (Kap. III). Wir haben jetzt nur 3 mit 4, 5 mit 5_2, 6 mit 6_2, 5′ mit $5_2'$, 6′ mit $6_2'$ zu vertauschen. Auf einer und derselben Geraden liegen die Punkte:

$$12 \times 35_2', \quad 14 \times 36_2', \quad 15_2 \times 32, \quad 16_2 \times 34$$

Um die Ecken $5_3'$ und $6_3'$ zu konstruieren, haben wir 2 mit 4, 5 mit 5_3, 6 mit 6_3, 5′ mit $5_3'$ und 6′ mit $6_3'$ zu vertauschen. Auf einer und derselben Geraden befinden sich die Punkte:

$$14 \times 25_3', \quad 13 \times 26_3', \quad 15_3 \times 24, \quad 16_3 \times 23$$

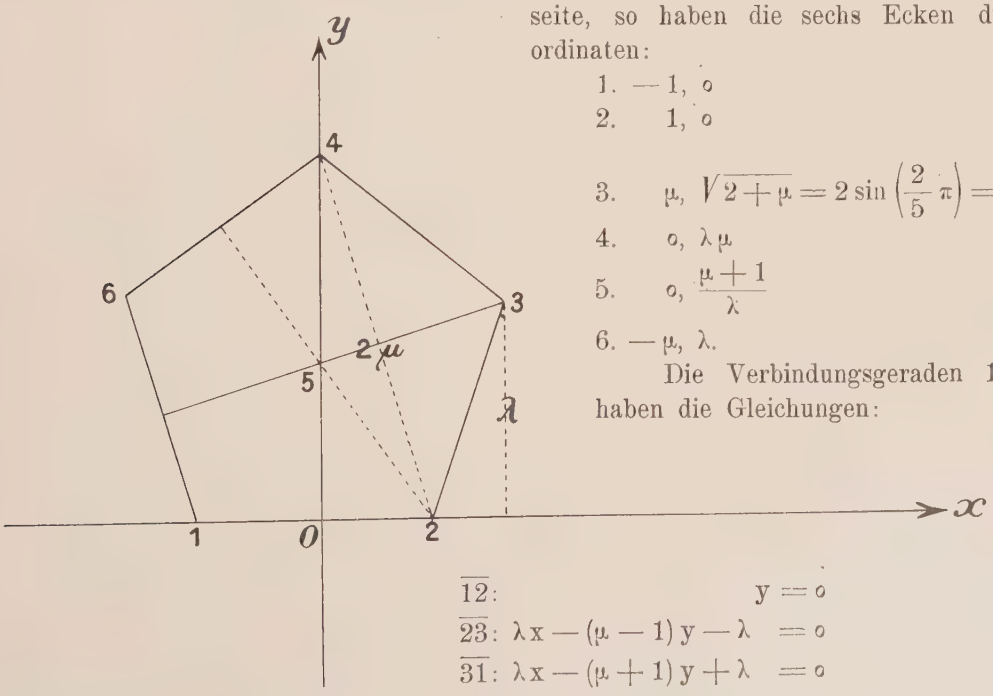
Analoge Betrachtungen wie sie für die Punktepaare 5_2, 6_2 und 5_3, 6_3 angestellt wurden, lehren, daß die Ecken $5_2'$ und $6_2'$ bezw. auf den Verbindungsgeraden 25 und 16 und die Ecken $5_3'$ und $6_3'$ bezw. auf den Verbindungsgeraden 15 und 36 liegen.

Zwischen den sechs 10fach Brianchonschen Sechsecken, welche vier Punkte bestimmen, bestehen bemerkenswerte Beziehungen, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Es sei nur erwähnt, daß die sechs Punkte 5, 6, 5_2, 6_2, 5_3, 6_3 ein interessantes Pascalsches Sechseck bilden, das in späteren Kapiteln eingehende Betrachtung finden wird.

In der Figur auf Seite 14 sind die hier erläuterten Konstruktionen durchgeführt.

V. Das reguläre Fünfeck und sein Mittelpunkt als 10fach Brianchonsches Sechseck.[1]

Im folgenden soll gezeigt werden, daß Ecken und Mittelpunkt eines regelmäßigen Fünfecks ein 10fach Brianchonsches Sechseck bilden. Wir numerieren die Ecken eines regulären Fünfecks, den Umfang im gleichen Sinn durchlaufend, mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 6 und den Mittelpunkt desselben mit 5 und nehmen die Seite $\overrightarrow{12}$ als positiven Zweig der x-Achse, die Seite $\overrightarrow{54}$ als positiven Zweig der Ordinatenachse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems.



Wählen wir als Längeneinheit die halbe Fünfeckseite, so haben die sechs Ecken die folgenden Koordinaten:

1. $-1, \; 0$
2. $1, \; 0$
3. $\mu, \; \sqrt{2+\mu} = 2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \lambda; \; \mu = \frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}$
4. $0, \; \lambda\mu$
5. $0, \; \frac{\mu+1}{\lambda}$
6. $-\mu, \; \lambda.$

Die Verbindungsgeraden 12, 23, 31, 14, 24 haben die Gleichungen:

$\overline{12}$: $\quad y = 0$

$\overline{23}$: $\quad \lambda x - (\mu - 1)\, y - \lambda = 0$

$\overline{31}$: $\quad \lambda x - (\mu + 1)\, y + \lambda = 0$

$\overline{14}$: $\quad \lambda\mu x - y + \lambda\mu = 0$

$\overline{24}$: $\quad \lambda\mu x + y - \lambda\mu = 0.$

[1]) Vergleiche die Aufsätze von Schröter und Heß, Mathem. Annalen, Bd. 28.

Wir gehen nun zu projektiven Koordinaten über, indem wir das Dreieck 1 2 3 als Koordinatendreieck wählen und demgemäß setzen:

$$\rho x_1 = k_1 \left[\lambda x - (\mu - 1) y - \lambda\right]$$
$$\rho x_2 = k_2 \left[\lambda x - (\mu + 1) y + \lambda\right]$$
$$\rho x_3 = k_3 y$$

Die Multiplikatoren k_i wählen wir so, daß die Verbindungsgeraden 14, 24 die einfachen Gleichungsformen $x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$ annehmen, d. h. wir befriedigen die Identitäten:

$$k_2 \left[\lambda x - (\mu + 1) y + \lambda\right] + k_3 y \equiv \nu \left[\lambda \mu x - y + \lambda \mu\right]$$
$$k_1 \left[\lambda x - (\mu - 1) y - \lambda\right] + k_3 y \equiv \sigma \left[\lambda \mu x + y - \lambda \mu\right]$$

woraus sich für die k_i die Werte $k_1 = f\mu$, $k_2 = f$, $k_3 = 2f$ ergeben. Nehmen wir den Proportionalitätsfaktor f in den Faktor ρ auf, so sind die projektiven Koordinaten eines Punktes (x, y), bezogen auf das Dreieck 1 2 3, definiert durch die drei Gleichungen:

$$\rho x_1 = \mu\lambda x - y - \lambda\mu$$
$$\rho x_2 = \lambda x - (\mu + 1) y + \lambda$$
$$\rho x_3 = 2y$$

Für den Übergang von rechtwinkeligen Koordinaten zu projektiven erhalten wir aus vorstehenden Beziehungen

$$x = -\frac{x_1 + \mu x_2 + (\mu + 1) x_3}{x_1 - \mu x_2 - \mu x_3}$$
$$y = -\frac{\lambda \mu x_3}{x_1 - \mu x_2 - \mu x_3}$$

Die Gleichungen der Verbindungsgeraden 15, 25, 16, 36 in rechtwinkeligen Koordinaten sind:

$$\overline{15}: \quad (\mu + 1) x - \lambda y + (\mu + 1) = 0$$
$$\overline{25}: \quad (\mu + 1) x + \lambda y - (\mu + 1) = 0$$
$$\overline{16}: \quad \lambda x + (\mu - 1) y + \lambda = 0$$
$$\overline{36}: \quad y - \lambda = 0$$

und in projektiven Koordinaten:

$$\overline{15}: \quad \mu x_2 + x_3 = 0$$
$$\overline{25}: \quad x_1 + \mu x_3 = 0$$
$$\overline{16}: \quad x_2 + \mu x_3 = 0$$
$$\overline{36}: \quad x_1 - \mu x_2 = 0$$

Die sechs Ecken des Sechsecks sind somit analytisch definiert durch die folgenden sechs Gleichungspaare:

1.	$x_2 = 0$,	$x_3 = 0$
2.	$x_1 = 0$,	$x_3 = 0$
3.	$x_1 = 0$,	$x_2 = 0$
4.	$x_2 + x_3 = 0$,	$x_1 + x_3 = 0$
5.	$\mu x_2 + x_3 = 0$,	$x_1 + \mu x_3 = 0$
6.	$x_2 + \mu x_3 = 0$,	$x_1 - \mu x_2 = 0$

welche nach den Untersuchungen im Kapitel III ein 10fach Brianchonsches Sechseck bestimmen. Wir haben somit das Resultat:

I. Die Ecken und der Mittelpunkt eines regulären Fünfecks bilden ein 10-fach Brianchonsches Sechseck.

Alle projektiven Eigenschaften des durch Ecken und Mittelpunkt eines regulären Fünfecks bestimmten Sechsecks gelten daher auch für jedes andere 10fach Brianchonsche Sechseck und umgekehrt.

Das durch das reguläre Fünfeck und seinen Mittelpunkt definierte 10fach Brianchonsche Sechseck ist 5fach axial-symmetrisch; es entsprechen sich in ihm symmetrisch und demgemäß im allgemeinen 10fach Brianchonschen Sechseck perspektiv die Punkte:

$1-2$	$1-4$	$1-1$	$1-3$	$1-6$
$2-1$	$2-3$	$2-6$	$2-2$	$2-4$
$3-6,$	$3-2,$	$3-4,$	$3-1,$	$3-3$
$4-4$	$4-1$	$4-3$	$4-6$	$4-2$
$5-5$	$5-5$	$5-5$	$5-5$	$5-5$
$6-3$	$6-6$	$6-2$	$6-4$	$6-1.$

Aus dem fünften Paar perspektiver Sechsecke: $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,3\,2\,5\,1 \end{cases}$ ergibt sich durch die dem Tripel T_2 entsprechende Vertauschung $\binom{1\,2\,4}{5\,3\,6}$ das weitere Paar $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,6\,5\,4\,3 \end{cases}$ und aus dem ersten Paar $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,6\,4\,5\,3 \end{cases}$ durch die dem Tripel T_4 entsprechende Vertauschung $\binom{1\,3\,5}{2\,4\,6}$ das Paar $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,3\,5\,4\,6 \end{cases}$. Wegen der oben angedeuteten Symmetrie bezw. Perspektivität folgen aus jedem der beiden Paare perspektiver Sechsecke: $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,6\,5\,4\,3 \end{cases}$, $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,3\,5\,4\,6 \end{cases}$ noch weitere vier, so daß neben den genannten fünf Paaren noch die folgenden zehn bestehen:

$1-1$	$1-4$	$1-5$	$1-3$	$1-1$
$2-2$	$2-2$	$2-6$	$2-5$	$2-4$
$3-6$	$3-3$	$3-3$	$3-1$	$3-5$
$4-5$	$4-1$	$4-4$	$4-4$	$4-2$
$5-4$	$5-6$	$5-1$	$5-2$	$5-3$
$6-3$	$6-5$	$6-2$	$6-6$	$6-6$
$1-2$	$1-1$	$1-5$	$1-1$	$1-6$
$2-1$	$2-3$	$2-2$	$2-5$	$2-2$
$3-3$	$3-2$	$3-4$	$3-3$	$3-5$
$4-5$	$4-4$	$4-3$	$4-6$	$4-4$
$5-4$	$5-6$	$5-1$	$5-2$	$5-3$
$6-6$	$6-5$	$6-6$	$6-4$	$6-1.$

Da die Ecken eines 10fach Brianchonschen Sechsecks in projektiver Hinsicht durchaus gleichberechtigt sind, so müssen $\binom{6}{2} = 15$ Zuordnungen, in denen sich je zwei Ecken selbst entsprechen, vorhanden sein. Die gegebene Aufzählung ist daher vollständig und wir können den Satz aussprechen:

II. Die Ecken eines 10fach Brianchonschen Sechsecks lassen sich auf 15 verschiedene Arten einander perspektiv zuordnen.

Um im Laufe unserer späteren Untersuchungen neue Resultate abzuleiten, können wir daher stets Nummern entsprechender Ecken eines der 15 genannten Paare perspektiver Sechsecke miteinander vertauschen. Die Vertauschung der Nummern der beiden Sechsecke $\begin{cases} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,6\,5\,4\,3 \end{cases}$ werden wir so andeuten: $\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,6\,5}$.

VI. Projektive Eigenschaften des vollständigen 10fach Brianchonschen Sechsecks.

Die 15 Verbindungsgeraden der Ecken eines Sechsecks schneiden sich höchstens in

$$\binom{15}{2} - 6 \cdot \left[\binom{5}{2} - 1\right] = 105 - 54 = 51$$

Punkten. Handelt es sich um ein 10fach Brianchonsches Sechseck, d. h. gehen von den 15 Verbindungsgeraden v zehnmal je drei durch einen und denselben Punkt Q, der mit keiner Ecke zusammenfällt, so fallen von den 45 Schnittpunkten, die außerhalb der Ecken liegen

$$10 \cdot \left[\binom{3}{2} - 1\right] = 20$$

weg. Die 15 Verbindungsgeraden v eines 10fach Brianchonschen Sechsecks schneiden sich folglich außerhalb der sechs Ecken noch in 25 Punkten. Rechnet man von diesen 25 Schnittpunkten die 10 Punkte Q ab, die je ein Linientripel enthalten, so verbleiben noch 15 Schnittpunkte S, in denen sich nur je zwei der 15 Verbindungsgeraden v schneiden.

Die Ecken des 10fach Brianchonschen Sechsecks 1, 2, ... 6 lassen sich polar den folgenden sechs Verbindungsgeraden zuordnen:

$$I \equiv 23 \times 56 \to 46 \times 25, \quad II \equiv 16 \times 35 \to 15 \times 34, \quad III \equiv 12 \times 45 \to 46 \times 25$$
$$IV \equiv 23 \times 56 \to 16 \times 35, \quad V \equiv 12 \times 36 \to 23 \times 14, \quad VI \equiv 12 \times 45 \to 15 \times 34.$$

Diese Geraden haben inbezug auf das im Kap. III gewählte Koordinatendreieck 1 2 3 die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&I. && (\mu - 3)\,x_1 + x_2 - x_3 = 0\\
&II. && x_1 - (\mu + 2)\,x_2 - \mu\, x_3 = 0\\
&III. && x_1 + \mu\, x_2 + (\mu + 2)\,x_3 = 0\\
&IV. && x_1 - \mu\, x_2 + \mu\, x_3 = 0\\
&V. && (\mu - 1)\,x_1 - x_2 - x_3 = 0\\
&VI. && x_1 + \mu\, x_2 + \mu\, x_3 = 0
\end{aligned} \qquad \mu = \frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}$$

Der zuordnende Kegelschnitt hat die Gleichung:

$$X(x\,x) \equiv (\mu - 3)\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - (\mu + 2)\,x_2^2 - 2\,x_1\,x_3 - 2\,\mu\,x_2\,x_3 - (\mu + 2)\,x_3^2 = 0$$

Die Polare des Punktes 1, die Gerade I, geht, wie man leicht rechnerisch oder am regulären Fünfeck direkt planimetrisch bestätigen kann, außerdem durch die folgenden drei Schnittpunkte S

$$63 \times 45, \qquad 24 \times 35, \qquad 34 \times 26$$

Vertauschen wir nun entsprechende Ecken der perspektiven Dreiecke

$$2.\ \begin{matrix}1\,3\,5\\2\,4\,6\end{matrix} \quad 3.\ \begin{matrix}1\,2\,5\\3\,4\,6\end{matrix} \quad 4.\ \begin{matrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\end{matrix} \quad 5.\ \begin{matrix}1\,2\,4\\5\,3\,6\end{matrix} \quad 6.\ \begin{matrix}1\,2\,4\\6\,3\,5\end{matrix}$$

so transformieren sich in den fünf Fällen die beiden sich polar entsprechenden Elemente:

1. Pol 1 Polare I: $23 \times 56 \to 46 \times 25 \to 63 \times 45 \to 24 \times 35 \to 34 \times 26$

in die folgenden polar sich entsprechenden Elementenpaare

2. Pol 2 Polare II: $41 \times 65 \to 35 \times 16 \to 54 \times 36 \to 13 \times 46 \to 43 \times 15$
3. „ 3 „ III: $41 \times 65 \to 25 \times 46 \to 51 \times 26 \to 42 \times 16 \to 12 \times 45$
4. „ 4 „ IV: $56 \times 23 \to 13 \times 52 \to 36 \times 12 \to 51 \times 62 \to 61 \times 53$
5. „ 5 „ V: $32 \times 14 \to 64 \times 31 \to 42 \times 61 \to 36 \times 21 \to 26 \times 34$
6. „ 6 „ VI: $32 \times 41 \to 51 \times 34 \to 12 \times 54 \to 35 \times 24 \to 25 \times 31.$

Wie man nun leicht erkennt sind die Pole der 15 Verbindungsgeraden v die 15 Punkte S. Der Pol von 12 z. B. ist der Punkt $(I\ II) \equiv 63 \times 45 \equiv S$. Die sechs Geraden $g = I, II, \ldots . VI$ bilden somit ein Sechsseit, das dem 10fach Brianchonschen Sechseck $G = 1, 2, \ldots 6$ dual gegenübertritt und daher als 10fach Pascalsches Sechsseit bezeichnet werden kann.

Im Kapitel I haben wir gezeigt, daß zu jedem Tripel T_i vier Kegelschnitte Ω gehören, welche in jedem der vier zugehörigen Paare perspektiv sich entsprechender Dreiecke eine polare Zuordnung bestimmen. Die dem Tigel $T_1 = 16, 25, 34$ entsprechenden vier Ω-Kegelschnitte:

$$\Omega^{123}_{654} \qquad \Omega^{623}_{154} \qquad \Omega^{153}_{624} \qquad \Omega^{124}_{653}$$

bestimmen die folgende polare Zuordnung:

Polaren:	Pole:	
16	$54 \times 23 \equiv Q$	
25	$64 \times 13 \equiv S$	Gerade l
34	$65 \times 12 \equiv Q$	
16	$23 \times 54 \equiv Q$	
25	$14 \times 63 \equiv Q$	Gerade l
34	$15 \times 62 \equiv S$	
16	$25 \times 43 \equiv S$	
25	$13 \times 64 \equiv S$	Gerade q
34	$62 \times 15 \equiv S$	
16	$53 \times 24 \equiv S$	
25	$63 \times 14 \equiv Q$	Gerade l
34	$12 \times 65 \equiv Q$	

Die Gerade q ergibt sich auch durch Polarisation des Tripels T_1 an dem oben erwähnten Kegelschnitt $X(x\,x) = 0$.

Jedem der Geradentripel T_i sind somit drei Geraden l zugeordnet, von denen eine jede zwei Punkte Q und einen Punkt S enthält, außerdem eine Gerade q, welche drei Punkte S enthält. Da 10 Geradentripel T_i vorhanden sind, so existieren $3 \cdot 10 = 30$ Geraden l und 10 Geraden q.

Die zehn Punkte Q bestimmen 45 Verbindungsgeraden. Diese bestehen aus den 15 Verbindungsgeraden v der sechs Ecken G und den 30 Geraden l. Durch jeden Punkt Q gehen im ganzen 9 der 45 Verbindungsgeraden, nämlich 3 v und 6 l.

Wir fassen die vorstehenden Untersuchungen in die folgenden dual sich entsprechenden Sätze zusammen:

I. Die sechs Punkte $G = 1, 2, \ldots 6$ bestimmen ein 10fach Brianchonsches Sechseck.

II. Die sechs Punkte G bestimmen 15 Verbindungsgeraden v.

III. Die 15 Geraden v bestimmen außer den Ecken G noch 25 Schnittpunkte. Diese lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

a) 10 Punkte Q,

b) 15 Punkte S.

In jedem Punkt Q schneiden sich je 3 v und in jedem Punkt S je 2 v.

IV. Durch jeden Punkt G gehen fünf Geraden s.

V. Die 15 Punkte S sind identisch mit den 15 Punkten V und bestimmen somit die sechs Geraden g.

Oder:

Durch jedes 10fach Brianchonsche Sechseck ist auch ein 10fach Pascalsches Sechsseit bestimmt.

VI. Durch jedes 10fach Brianchonsche Sechseck sind zehn Kurven 2. Klasse K bestimmt; jede K wird von je sechs der Geraden v berührt.

VII. Die zehn Punkte Q bestimmen 30 Verbindungsgeraden l, welche nicht durch die Ecken G hindurchgehen.

VIII. Durch jeden Punkt Q gehen 3 v und 6 l.

I'. Die sechs Geraden $g = I, II \ldots VI$ bestimmen ein 10fach Pascalsches Sechsseit.

II'. Die sechs Geraden g bestimmen 15 Schnittpunkte V.

III'. Die 15 Punkte V bestimmen außer den Geraden g noch 25 Verbindungsgeraden. Diese lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

a') 10 Geraden q,

b') 15 Geraden s.

Auf jeder Geraden q liegen je 3 V und auf jeder Geraden s je 2 V.

IV'. Auf jeder Geraden g liegen fünf Punkte S.

V'. Die 15 Geraden s sind identisch mit den 15 Geraden v und bestimmen somit die sechs Ecken G.

Oder:

Durch jedes 10fach Pascalsche Sechsseit ist auch ein 10fach Brianchonsches Sechseck bestimmt.

VI'. Durch jedes 10fach Pascalsche Sechsseit sind zehn Kurven 2. Ordnung C bestimmt; jede C enthält je sechs der Punkte V.

VII'. Die zehn Geraden q bestimmen 30 Schnittpunkte L, welche nicht auf den Geraden g liegen.

VIII'. Auf jeder Geraden q liegen 3 V und 6 L.

Untersuchen wir nun die gegenseitige Lage der durch ein 10fach Brianchonsches Sechseck bestimmten zehn Kurven 2. Klasse K.

Die sechs Tangenten, welche das zum Tripel $T_1 = 16, 25, 34$ gehörige Brianchonsche Sechsseit B_1 bilden, sind die folgenden:

$$I = 12, \quad II = 23, \quad III = 36, \quad IV = 65, \quad V = 54, \quad VI = 41.$$

Nach einem Satz der projektiven Geometrie schneiden die Tangenten eines Kegelschnitts aus irgend zwei festen Tangenten projektive Punktreihen aus. Nehmen wir die Tangenten I und II als Träger, so bestimmen die übrigen vier die projektive Beziehung:

$$(I\,III), (I\,IV), (I\,V), (I\,VI) \;\overline{\wedge}\; (II\,III), (II\,IV), (II\,V), (II\,VI)$$

oder:

$$12 \times 36,\ 12 \times 56,\ 12 \times 45,\ 1 \;\overline{\wedge}\; 3,\ 23 \times 56,\ 23 \times 45,\ 14 \times 23.$$

Dem Schnittpunkt (II I) = 2 in der Reihe des Trägers II entspricht in der Reihe des Trägers I der Berührungspunkt X von I. Irgend vier Punkte der einen Reihe bilden dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden der anderen Reihe, also

$$(2,\ 3,\ 23 \times 56,\ 14 \times 23) = (X,\ 12 \times 36,\ 12 \times 56,\ 1).$$

Nun ist aber $(2, 3, 23 \times 56, 14 \times 23) = -1$, wie man leicht analytisch oder durch bloße Betrachtung des regulären Fünfecks bestätigt und folglich auch

$$(1,\ 12 \times 56,\ 12 \times 36,\ X) = -1.$$

Projizieren wir nun die vorliegende Punktreihe aus dem Punkt 23×56, so ergibt sich das Quadrupel der vier projizierenden Geraden

$$23 \times 56 \rightarrow 1, \quad 23 \times 56 \rightarrow 12 \times 56 \equiv 56, \quad 23 \times 56 \rightarrow 12 \times 36, \quad 23 \times 56 \rightarrow X$$

und es ist

$$(23 \times 56 \rightarrow 1,\ 56,\ 23 \times 56 \rightarrow 12 \times 36,\ 23 \times 56 \rightarrow X) = -1.$$

Die Gleichungen der zwei ersten dieser vier Geraden lassen sich schreiben:

$$(156)(x\,23) - (123)(x\,56) = 0$$
$$(x\,56) = 0.$$

Die dritte und vierte Gerade haben wegen der vorstehenden harmonischen Beziehung Gleichungen von der Form:

$$\text{A.}\quad (156)(x\,23) - (123)(x\,56) - \lambda(x\,56) = 0$$
$$\text{B.}\quad (156)(x\,23) - (123)(x\,56) + \lambda(x\,56) = 0$$

Die Gleichung der Geraden $23 \times 56 \rightarrow 12 \times 36$ ist aber

$$(612)(536)(x\,23) - (312)(236)(x\,56) = 0$$

und es besteht folglich die Identität:

$$(156)(x\,23) - (123)(x\,56) - \lambda(x\,56) \equiv k\left[(612)(536)(x\,23) - (312)(236)(x\,56)\right]$$

aus der sich für λ der Wert ergibt

$$\lambda = -\frac{(123)(613)(526)}{(612)(536)}$$

Benützen wir die im Kapitel I abgeleitete Identität

$$(126)(563)(432) = (526)(463)(132)$$

welche die Existenz des Geradentripels $T_4 = 12, 34, 56$ zum Ausdruck bringt, so reduziert sich der obige Quotient auf den einfacheren

$$\lambda = \frac{(613)(432)}{(436)}$$

und die Gleichung B. nimmt die Form an:

$$(156)(436)(x\,23) - (123)(436)(x\,56) + (613)(432)(x\,56) = 0$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit (512) und wenden wir die drei Identitäten an

$$(612)(634) = (612)(534)$$
$$(413)(532)(621) = (613)(432)(521)$$
$$\Phi^{21}_{31,\,53} \equiv \Phi^{53}_{24,\,31}$$

so ergibt sich für die Gerade $23 \times 56 \rightarrow X$ die Gleichung

$$(615)(534)(x\,23) - (315)(234)(x\,56) = 0$$

Diese stellt aber, wie man leicht rechnerisch bestätigt, die Gerade

$$q \equiv 23 \times 56 \rightarrow 15 \times 34 \rightarrow 16 \times 24$$

dar. Der Berührungspunkt X der Tangente 12 des Kegelschnitts K_{T_1} wird somit durch die Verbindungsgerade q der drei Punkte S (bezw. V) 23×56, 15×34, 16×24 ausgeschnitten und ist, wie wir sogleich sehen werden, ein Punkt L. Durch Polarisation des Tripels $T_5 = 12, 35, 46$ am Kegelschnitt Ω^{154}_{236} erhalten wir nämlich die Gerade

$$l = 36 \times 45 \rightarrow 26 \times 14 \times 25 \rightarrow 23 \times 46 \times 15$$

und durch Polarisation dieser l am Kegelschnitt X (S. 20) den auf 12 liegenden Punkt

$$L = 12 \times \left[15 \times 34 \rightarrow 23 \times 56 \rightarrow 16 \times 24\right] \times \left[14 \times 56 \rightarrow 13 \times 25 \rightarrow 34 \times 26\right]$$

Der Berührungspunkt X fällt somit mit diesem Punkt L zusammen.

Vertauschen wir nach Maßgabe der durch das Brianchonsche Sechsseit $B_1 = 12 - 23 - 36 - 65 - 54 - 41$ gegebenen Nummernfolge 1 2 3 6 5 4 die Ziffern 1, ... 6 zyklisch, so geht das Sechsseit B_1 über in sich selbst. Der oben erwähnte Berührungspunkt L, den wir jetzt mit L_1 bezeichnen, geht über in den Berührungspunkt der Tangente 23:

$$L_2 = 23 \times \left[24 \times 61 \rightarrow 36 \times 45 \rightarrow 25 \times 31\right] \times \left[21 \times 45 \rightarrow 26 \times 34 \rightarrow 61 \times 35\right]$$

Vertauschen wir in der vorstehenden und in den folgenden Beziehungen abermals zyklisch in derselben Weise, so erhalten wir die Berührungspunkte L_3, L_4, L_5, L_6 der übrigen Tangenten 36, 65, 54, 41:

$$L_3 = 36 \times \left[31 \times 52 \rightarrow 65 \times 14 \rightarrow 34 \times 62\right] \times \left[32 \times 14 \rightarrow 35 \times 61 \rightarrow 52 \times 64\right]$$

$$L_4 = 65 \times \left[62 \times 43 \rightarrow 54 \times 21 \rightarrow 61 \times 53\right] \times \left[63 \times 21 \rightarrow 64 \times 52 \rightarrow 43 \times 51\right]$$

$$L_5 = 54 \times \left[53 \times 16 \rightarrow 41 \times 32 \rightarrow 52 \times 46\right] \times \left[56 \times 32 \rightarrow 51 \times 43 \rightarrow 16 \times 42\right]$$

$$L_6 = 41 \times \left[46 \times 25 \rightarrow 12 \times 63 \rightarrow 43 \times 15\right] \times \left[45 \times 63 \rightarrow 42 \times 16 \rightarrow 25 \times 13\right]$$

Nach Maßgabe des Tripels $T_5 = 12, 35, 46$ führen wir die Ziffernvertauschung $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ aus. Das Brianchonsche Sechsseit B_1 geht über in das dem Tripel $T_3 = 13, 24, 56$ entsprechende Brianchonsche Sechsseit

$$B_3 = 21 - 15 - 54 - 43 - 36 - 62$$

Die Berührungspunkte L_i der 6 Tangenten des Kegelschnitts K_{T_1} gehen über in die Berührungspunkte L der sechs Tangenten des Kegelschnitts K_{T_3}. Bezeichnen wir den Berührungspunkt L einer Tangente ik des zum Tripel mn, pq, rs gehörigen Kegelschnitts durch $L^{ik}_{mn,\,pq,\,rs}$, so sind die Berührungspunkte L der sechs Tangenten von $K_{13,\,24,\,56} \equiv K_{T_3}$ in folgender Weise definiert:

$$L^{21}_{13,\,24,\,56} = 21 \times \left[23 \times 56 \rightarrow 15 \times 34 \rightarrow 24 \times 16\right] \times \left[26 \times 34 \rightarrow 25 \times 13 \rightarrow 56 \times 14\right]$$

$$L^{15}_{13,\,24,\,56} = 15 \times \left[16 \times 24 \rightarrow 54 \times 63 \rightarrow 13 \times 25\right] \times \left[12 \times 63 \rightarrow 14 \times 56 \rightarrow 42 \times 53\right]$$

$$L^{54}_{13,\,24,\,56} = 54 \times \left[52 \times 31 \rightarrow 43 \times 26 \rightarrow 56 \times 41\right] \times \left[51 \times 26 \rightarrow 53 \times 42 \rightarrow 31 \times 46\right]$$

$$L^{43}_{13,\,24,\,56} = 43 \times \left[41 \times 65 \rightarrow 36 \times 12 \rightarrow 42 \times 35\right] \times \left[45 \times 12 \rightarrow 46 \times 31 \rightarrow 65 \times 32\right]$$

$$L^{36}_{13,\,24,\,56} = 36 \times \left[35 \times 24 \rightarrow 62 \times 51 \rightarrow 31 \times 64\right] \times \left[34 \times 51 \rightarrow 32 \times 65 \rightarrow 24 \times 61\right]$$

$$L^{62}_{13,\,24,\,56} = 62 \times \left[64 \times 13 \rightarrow 21 \times 45 \rightarrow 65 \times 23\right] \times \left[63 \times 45 \rightarrow 61 \times 24 \rightarrow 13 \times 25\right]$$

Hieraus folgt, daß der Punkt $L^{21}_{13,\,24,\,56}$ identisch ist mit dem weiter oben definierten Berührungspunkt $L_1 = L^{12}_{16,\,25,\,34}$.

Nehmen wir im Sechsseit $B_1 = 12 - 23 - 36 - 65 - 54 - 41$ eine zyklische Vertauschung der Nummern 1, 2, ... 6 vor nach Maßgabe der Folge 1 2 3 6 5 4, so ergibt sich aus der Identität:

$$1.\quad L^{21}_{13,\,24,\,56} \equiv L^{12}_{16,\,25,\,34}$$

die weitere

$$2.\quad L^{32}_{26,\,31,\,45} \equiv L^{23}_{25,\,34,\,61}$$

Vertauschen wir auch in dieser und in den folgenden Beziehungen die Ziffern zyklisch in derselben Weise, so ergeben sich noch die folgenden vier Identitäten:

$$3.\quad L^{63}_{35,\,62,\,14} \equiv L^{36}_{34,\,61,\,52}$$

$$4.\quad L^{56}_{64,\,53,\,21} \equiv L^{65}_{61,\,52,\,43}$$

$$5.\quad L^{45}_{51,\,46,\,32} \equiv L^{54}_{52,\,43,\,16}$$

$$6.\quad L^{14}_{42,\,15,\,63} \equiv L^{41}_{43,\,16,\,25}$$

Die zehn Brianchonschen Sechsseite, welche durch ein 10fach Brianchonsches Sechseck definiert sind, unterscheiden sich in projektiver Hinsicht nicht von einander und lassen sich leicht durch

bestimmte Ziffern-Vertauschungen in einander überführen. Wir deuten nachstehend symbolisch an, wie aus B_1 die übrigen neun Sechsseite B_i abgeleitet werden können.

$$B_2 = (1\,2\,4\,5\,3\,6) = \begin{pmatrix}1\,2\,4\\3\,6\,5\end{pmatrix}(1\,2\,3\,6\,5\,4) = T_6\,B_1$$

$$B_3 = T_5\,B_1,\ B_4 = T_{10}\,B_2,\ B_5 = T_1\,B_3,\ B_6 = T_1\,B_2$$
$$B_7 = T_9\,B_4,\ B_8 = T_6\,B_4,\ B_9 = T_2\,B_3,\ B_{10} = T_2\,B_4.$$

Was wir in Bezug auf den zum Tripel T_1 gehörigen Kegelschnitt K bewiesen haben, gilt somit auch für jeden der übrigen neun K und wir können, wenn wir noch am Kegelschnitt X (S. 20) polarisieren, die folgenden dualen Sätze aussprechen:

IX. Der Berührungspunkt einer jeden Tangente v eines jeden Kegelschnitts K ist ein Punkt L.

X. Jeder der zehn Kegelschnitte K wird von sechs der übrigen neun Kegelschnitte K in sechs Berührungspunkten L berührt.

IX'. Die Berührungsgerade in einem jeden Punkt V eines jeden Kegelschnitts C ist eine Gerade l.

X'. Jeder der zehn Kegelschnitte C wird von sechs der übrigen neun Kegelschnitte C in sechs Berührungsgeraden l berührt.

Gemäß Satz VIII liegen je sechs Punkte L auf einer Geraden q. Aus diesem und dem vorhergehenden Satz folgt daher:

XI. Je sechs der 30 Berührungspunkte L der zehn Kegelschnitte K liegen auf einer und derselben Geraden q.

XI'. Je sechs der 30 Berührungsgeraden l der zehn Kegelschnitte C gehen durch einen und denselben Punkt Q.

Am Schluß des Kapitels V haben wir bewiesen, daß die Ecken eines 10fach Brianchonschen Sechsecks auf 15 verschiedene Arten einander perspektiv sich zuordnen lassen. Es bestehen die beiden Paare perspektiver Sechsecke $\begin{cases}1\,2\,3\,4\,5\,6\\4\,2\,3\,1\,6\,5\end{cases}$, $\begin{cases}1\,2\,3\,4\,5\,6\\6\,4\,3\,2\,5\,1\end{cases}$ und folglich die perspektiven Beziehungen:

$$46,\ 45,\ 41,\ 43,\ 42 \ \overline{\wedge}\ 15,\ 16,\ 14,\ 13,\ 12$$
$$46,\ 45,\ 41,\ 43,\ 42 \ \overline{\wedge}\ 21,\ 25,\ 26,\ 23,\ 24$$

aus denen sich die projektive Beziehung

$$15,\ 16,\ 14,\ 13,\ 12 \ \overline{\wedge}\ 21,\ 25,\ 26,\ 23,\ 24$$

ergibt, welche den Kegelschnitt der Punkte 1, 16×25, 14×26, 3, 2 bestimmt. Der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte 1 und 2 der beiden projektiven Strahlenbüschel, insofern sie zum Büschel (1) gerechnet wird, entspricht im Büschel (2) die Tangente im Mittelpunkt 2, also die Gerade 24 und insofern sie zum Büschel (2) gerechnet wird, entspricht ihr im Büschel (1) die Tangente im Mittelpunkt 1, also die Gerade 15. Wir haben somit einen Kegelschnitt, der durch die Punkte 1, 2, 3, $16\times25\times34$, $14\times26\times35$ geht und in den Punkten 1 und 2 von den Geraden 15 und 24 berührt wird. Wir wollen ihn mit $D^{14\times26\times35}_{1,\,2,\,3\ \ 16\times25\times34}$ bezeichnen. Aus diesem Symbol lassen sich leicht die Tangenten 15 und 24 in den Punkten 1 und 2 bestimmen; es sind die durch diese Punkte hindurchgehenden Geraden v, welche nicht Seiten des Dreiecks 1 2 3 sind und nicht in den im Symbol enthaltenen beiden Tripeln T_i vorkommen.

Die einzigen Transformationen, welche wieder zu den Punkten 1, 2, 3 führen, sind die folgenden drei:

$$\begin{pmatrix}1\,3\,4\,6\\2\,3\,5\,6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,4\,5\\3\,2\,6\,5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,4\,5\\1\,3\,4\,6\end{pmatrix},\ \text{Kap. V.}$$

Die erste führt den Kegelschnitt $D^{14\times26\times35}_{1,\,2,\,3\ \ 16\times25\times34}$ in sich selbst über; die beiden anderen führen ihn über in die Kegelschnitte

$$D^{36\times24\times15}_{3,\,2,\,1\ \ 34\times25\times16},\qquad D^{14\times35\times26}_{1,\,3,\,2\ \ 15\times36\times24}$$

welche von den Geraden v 35, 26 bezw. 16, 34 berührt werden.

Es besteht somit ein Tripel von Kegelschnitten D, welche je durch die gleichen Punkte G 1, 2, 3 ferner durch zwei Punkte Q hindurchgehen und in zweien der drei genannten Punkte G von

zwei Geraden v berührt werden. Ein jeder der drei Kegelschnitte D schneidet einen jeden der beiden anderen außer in den Punkten 1, 2, 3 noch in einem Punkt Q.

Da alle Punkte und Geraden im vollständigen 10fach Brianchonschen Sechseck gleichberechtigt auftreten, so sind solcher Tripel von Kegelschnitten D im ganzen $\binom{6}{3} = 20$ vorhanden, so daß also 60 Kegelschnitte D existieren.

Bestimmen wir jetzt das gemeinsame Polardreieck der beiden letzteren der drei obengenannten Kegelschnitte D, die wir kurz mit D_2 und D_3 bezeichnen; es ist bestimmt durch die drei Nebenecken des Vierecks der Schnittpunkte 1, 2, 3, $15 \times 24 \times 36$, also durch die Punkte

$$13 \times \left[2 \longrightarrow 15 \times 24 \times 36\right], \quad 23 \times \left[1 \longrightarrow 15 \times 24 \times 36\right], \quad 12 \times \left[3 \longrightarrow 15 \times 24 \times 36\right]$$

d. h. durch die Punkte

$$A = 13 \times 24 \times 56, \qquad B = 23 \times 15 \times 46, \qquad C = 12 \times 36.$$

Die Gerade AC ist eine Gerade l und geht daher auch durch den Punkt Q $14 \times 26 \times 35$; dieser ist aber ein Punkt des Kegelschnitts D_2. Die AC schneidet nach der Polarentheorie der Kegelschnitte die Berührungspunkte der Tangenten aus, die man von B an D_2 legen kann. Der Kegelschnitt D_2 wird somit von der Geraden $l = 23 \times 15 \times 46 \longrightarrow 14 \times 26 \times 35$ im Punkt $14 \times 26 \times 35$ berührt. Durch die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ geht D_2 in sich selbst und die letztgenannte Tangente in die durch $36 \times 24 \times 15$ gehende Tangente $l = 21 \times 35 \times 64 \longrightarrow 36 \times 24 \times 15$ über.

Fassen wir zusammen:

XII. Im 10fach Brianchonschen Sechseck gibt es 60 Kegelschnitte D, die je durch drei Ecken G und zwei Punkte Q hindurchgehen, von zwei Geraden v in zweien dieser G und zweien Geraden l in den genannten Q berührt werden.

Die 60 Kegelschnitte D gruppieren sich in 20 Tripel. Jedes Tripel ist von der Art, daß jeder D, der ihm angehört, durch die gleichen drei Punkte G hindurchgeht und jeden der anderen beiden D des Tripels außerdem noch in einem Punkt Q schneidet.

XII'. Im 10fach Pascalschen Sechsseit gibt es 60 Kegelschnitte Δ, die je von drei Geraden g und zwei Geraden q berührt werden, durch zwei Punkte V, die Berührungspunkte zweier dieser g, und zwei Punkte L, die Berührungspunkte der genannten q hindurchgehen.

Die 60 Kegelschnitte Δ gruppieren sich in 20 Tripel. Jedes Tripel ist von der Art, daß jeder Δ, der ihm angehört, von den gleichen drei Geraden g berührt wird und mit jedem der anderen beiden Δ des Tripels außerdem noch eine Gerade q als Tangente gemein hat.

Die Punkte Q und S bestimmen außer den Geraden v, g, q, l noch

$$\binom{25}{2} - 15\binom{4}{2} - 6\binom{5}{2} - 10\binom{3}{2} - 30\binom{3}{2} = 30$$

Verbindungsgeraden h.

Auf jeder der drei Geraden v, die sich in einem Punkt Q schneiden, liegen außer diesem Punkt noch ein Punkt Q und zwei Punkte S; es verbleiben somit noch sechs Punkte Q und neun Punkte S, nach denen man Verbindungsgeraden ziehen kann, die nicht mit Geraden v zusammenfallen. Jede der sechs Verbindungsgeraden l, die nach den genannten sechs Punkten Q gezogen werden können, enthält, wie früher gezeigt wurde, je einen von den genannten neun Punkten S, so daß noch drei Punkte S vorhanden sind, nach denen man je eine Gerade h ziehen kann, die weder mit einer v, noch mit einer l zusammenfällt. Durch den Punkt $Q = 12 \times 34 \times 56$ z. B. gehen die drei Geraden h

$$12 \times 34 \times 56 \longrightarrow 36 \times 45, \quad 12 \times 34 \times 56 \longrightarrow 15 \times 26, \quad 12 \times 34 \times 56 \longrightarrow 14 \times 23.$$

Bevor wir uns mit den Geraden h weiter befassen, bestimmen wir noch die Anzahl der Geraden f, die man von den Ecken des Brianchonschen Sechsecks nach Punkten Q und S ziehen kann und die nicht mit Geraden v zusammenfallen. Da sich in jedem Q drei v schneiden, so gibt es von den Ecken G nach den Q keine Verbindungsgeraden f. Es kommen also nur die Verbindungsgeraden in Frage, welche die Ecken G mit Punkten S verbinden. Auf jeder der fünf Geraden v, die durch eine Ecke G gehen, liegen zwei S; nach zehn Punkten S kann man folglich von dieser

Ecke aus keine f ziehen. Durch jede Ecke G gehen somit 5 f und das 10fach Brianchonsche Sechseck enthält 30 Verbindungsgeraden f.

Durch den Punkt $Q = 12 \times 34 \times 56$ gehen die beiden Geraden l:

$$12 \times 34 \times 56 \longrightarrow 25 \times 13 \longrightarrow 26 \times 14 \times 35$$
$$12 \times 34 \times 56 \longrightarrow 24 \times 16 \longrightarrow 15 \times 23 \times 46$$

Durch einen und denselben Punkt gehen somit die fünf Geraden

$$12,\ 56,\ 34,\ 25 \times 13 \longrightarrow 26 \times 14,\ 24 \times 16 \longrightarrow 15 \times 23$$

Durch Polarisation am Kegelschnitt Ω_{136}^{245} gehen sie über in die auf einer und derselben Geraden liegenden fünf Punkte

$$45 \times 36,\ 13 \times 24,\ 25 \times 16,\ 35 \times \left[24 \times 36 \longrightarrow 23 \times 16\right],\ 64 \times \left[45 \times 13 \longrightarrow 36 \times 25\right]$$

Durch Polarisation dieser fünf Punkte am Kegelschnitt Ω_{236}^{145} erhält man die fünf durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden:

$$12,\ 36 \times 15 \longrightarrow 45 \times 26,\ 45 \times 23 \longrightarrow 36 \times 14,\ 15 \times 23 \longrightarrow 13 \times 25,\ 26 \times 14 \longrightarrow 24 \times 16$$

d. h. die Gerade v 12, die beiden Geraden l:

$$36 \times 15 \times 24 \longrightarrow 45 \times 26 \times 13 \longrightarrow 14 \times 23,\ 45 \times 23 \times 16 \longrightarrow 36 \times 14 \times 25 \longrightarrow 15 \times 26$$

und die beiden Geraden h:

$$15 \times 23 \longrightarrow 13 \times 25,\ 26 \times 14 \longrightarrow 24 \times 16$$

Die einzigen Transformationen, welche 12 in sich selbst überführen und eventuell neue Resultate liefern, sind die folgenden drei: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&6&5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&3&4&5\\2&6&4&5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&3&4&6\\2&3&5&6\end{pmatrix}$ (Kap. V). Die erste gibt nichts Neues; die zweite liefert die fünf Geraden:

$$12,\ 36 \times 25 \times 14 \longrightarrow 45 \times 13 \times 26 \longrightarrow 24 \times 16,\ 45 \times 16 \times 23 \longrightarrow 63 \times 24 \times 15 \longrightarrow 25 \times 13$$
$$25 \times 16 \longrightarrow 26 \times 15,\ 13 \times 24 \longrightarrow 14 \times 23$$

Die dritte Transformation liefert wieder die vorstehenden fünf Geraden.

Polarisieren wir schließlich noch am Kegelschnitt X (S. 20), so ergeben sich die beiden dualen Sätze:

XIII. Auf jeder der 15 Verbindungsgeraden v liegen zwei Punkte M, in denen sich je zwei Geraden l und zwei Geraden h schneiden. Im ganzen existieren somit 30 Punkte M.

XIII'. Durch jeden der 15 Schnittpunkte V gehen zwei Geraden m, auf denen je zwei Punkte L und zwei Punkte H liegen. Im ganzen existieren somit 30 Geraden m.

Wir wenden uns jetzt zu den Geraden f. Durch Polarisation der Fünfergruppe der Punkte S:

$$23 \times 56,\quad 46 \times 25,\quad 63 \times 45,\quad 24 \times 35,\quad 34 \times 26$$

welche auf der im Kapitel IV definierten Geraden I liegen, am Kegelschnitt Ω_{236}^{145} ergibt sich die Fünfergruppe der durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden:

$$5 \longrightarrow 23 \times 14,\ 26 \times 14 \longrightarrow 45 \times 23,\ 12,\ 45 \times 26 \longrightarrow 15 \times 23,\ 15 \times 26 \longrightarrow 4 \ldots \text{(A}$$

und durch Polarisation der auf einer und derselben Geraden (Gerade II, Kap. IV) liegenden fünf Punkte S:

$$14 \times 65,\quad 35 \times 16,\quad 54 \times 36,\quad 13 \times 46,\quad 43 \times 15$$

am Kegelschnitt Ω_{236}^{145} erhält man die fünf durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden:

$$6 \longrightarrow 14 \times 23,\ 15 \times 23 \longrightarrow 36 \times 14,\ 12,\ 36 \times 15 \longrightarrow 26 \times 14,\ 15 \times 26 \longrightarrow 3 \ldots \text{(B}$$

In beiden Fällen resultieren zwei Geraden f, zwei Geraden l und dieselbe Gerade v. Die Transformation $\begin{pmatrix}1&3&4&5\\2&6&4&5\end{pmatrix}$ liefert aus A) und B) die beiden weiteren Fünfergruppen von Geraden, die sich ebenfalls auf 12 in einem und demselben Punkt schneiden:

$$5 \longrightarrow 16 \times 24,\ 13 \times 24 \longrightarrow 45 \times 16,\ 12,\ 45 \times 13 \longrightarrow 25 \times 16,\ 25 \times 13 \longrightarrow 4 \ldots \text{(C}$$
$$3 \longrightarrow 24 \times 16,\ 25 \times 16 \longrightarrow 36 \times 24,\ 12,\ 36 \times 25 \longrightarrow 13 \times 24,\ 25 \times 13 \longrightarrow 6 \ldots \text{(D}$$

Jede andere Transformation, welche 12 in sich selbst überführt, liefert wieder eine der vier Gruppen A) B) C) D).

Wir haben somit die beiden dualen Sätze:

XIV. Auf jeder der 15 Verbindungsgeraden v liegen vier Punkte J, in denen sich je zwei Geraden l und zwei Geraden f schneiden. Im ganzen existieren somit 60 Punkte J.

XIV'. Durch jeden der 15 Schnittpunkte V gehen vier Geraden i, auf denen je zwei Punkte L und zwei Punkte F liegen. Im ganzen existieren somit 60 Geraden i.

Betrachten wir nun die folgenden fünf Geraden

$5 \longrightarrow 13 \times 46,\ 4 \longrightarrow 16 \times 35,\ 46 \times 15 \times 23 \longrightarrow 56 \times 41,\ 53 \times 14 \times 26 \longrightarrow 15 \times 43,\ 12$ . . (α

also zwei f, zwei h und eine v.

Die ersten vier Geraden lassen sich analytisch in folgender Weise darstellen:

$5 \longrightarrow 13 \times 46$: $(546)(x\,13) - (513)(x\,46) = 0$

$4 \longrightarrow 16 \times 35$: $(435)(x\,16) - (416)(x\,35) = 0$

$46 \times 15 \times 23 \longrightarrow 14 \times 56$: $(146)(546)(x\,15) - (415)(615)(x\,46) = 0$

$53 \times 14 \times 26 \longrightarrow 15 \times 43$: $(153)(453)(x\,14) - (514)(314)(x\,53) = 0.$

Die Gerade 12 läßt sich in den folgenden drei Formen darstellen:

$$\Big[(546)(x\,13) - (513)(x\,46)\Big] + \Big[(435)(x\,16) - (416)(x\,35)\Big] = 0$$

$$(513)\Big[(146)(546)(x\,15) - (415)(615)(x\,46)\Big] - (415)(615)\Big[(546)(x\,13) - (513)(x\,46)\Big] = 0$$

$$(416)\Big[(153)(453)(x\,14) - (514)(314)(x\,53)\Big] - (514)(314)\Big[(453)(x\,16) - (416)(x\,53)\Big] = 0.$$

Durch Anwendung der im Kapitel I bereitgestellten Hilfsmittel überzeugt man sich leicht, daß eine jede der vorstehenden drei Gleichungen durch $x = 1$, $x = 2$ befriedigt wird. Damit ist bewiesen, daß die obigen zwei Geraden f und zwei Geraden h sich im gleichen Punkt N auf 12 schneiden.

Durch die Transformation $\begin{pmatrix} 1\,3\,4\,5 \\ 2\,6\,4\,5 \end{pmatrix}$ erhält man noch die fünf ebenfalls durch einen und denselben Punkt N auf 12 gehenden Geraden:

$5 \longrightarrow 26 \times 43,\ 4 \longrightarrow 23 \times 65,\ 43 \times 25 \times 16 \longrightarrow 53 \times 42,\ 56 \times 24 \times 13 \longrightarrow 25 \times 46,\ 12$ . . (β

und durch die Transformation $\begin{pmatrix} 1\,3\,5 \\ 2\,4\,6 \end{pmatrix}$ erhält man aus den beiden Fünfergruppen α) und β) die beiden weiteren Gruppen von je fünf Geraden derselben Art, die sich auch wieder in einem Punkt N auf 12 schneiden:

$6 \longrightarrow 24 \times 35,\ 3 \longrightarrow 25 \times 46,\ 35 \times 26 \times 14 \longrightarrow 56 \times 23,\ 64 \times 23 \times 15 \longrightarrow 26 \times 34,\ 12$

$6 \longrightarrow 15 \times 34,\ 3 \longrightarrow 14 \times 56,\ 34 \times 16 \times 25 \longrightarrow 64 \times 31,\ 56 \times 13 \times 24 \longrightarrow 16 \times 35,\ 12.$

Die weiteren möglichen Transformationen, welche 12 in sich selbst überführen, ergeben nichts Neues. Fassen wir das Ergebnis in Worte:

XV. Auf jeder der 15 Verbindungsgeraden v liegen vier Punkte N, in denen sich je zwei Geraden f und zwei Geraden h schneiden. Im ganzen existieren somit 60 Punkte N.

XV'. Durch jeden der 15 Schnittpunkte V gehen vier Geraden n, auf denen je zwei Punkte F und zwei Punkte H liegen. Im ganzen existieren somit 60 Geraden n.

H. Schröter und E. Heß haben im Bd. 28 der Mathem. Annalen zwei Aufsätze veröffentlicht, welche einige der von mir bewiesenen Sätze über das 10fach Brianchonsche Sechseck bereits enthalten. Demnach glaube ich nicht, sie unterdrücken zu müssen; denn erstens sind sie von mir auf anderem — vielleicht einfacherem Wege — abgeleitet und zweitens mache ich von ihnen in den später folgenden Untersuchungen Gebrauch. Die von H. Schröter erwähnten beiden Sätze:

Bilden wir aus irgend drei Ecken des Clebschen (d. h. 10fach Brianchonschen) Sechsecks ein Dreieck, so enthält jede Seite desselben zwei von den zehn Perspektivitätszentren; solche sechs Perspektivitätszentren liegen allemal auf einem Kegelschnitt, und wir erhalten dadurch zehn Kegelschnitte, indem dieselben für zwei komplementäre Dreiecke identisch sind.

Ordnet man die 15 Diagonalpunkte der zweiten Gruppe (Punkte S bei mir) des Clebschen Sechsecks so zu fünf Dreiecken, daß die Seiten jedes Dreiecks zugleich Seiten des Clebschen Sechsecks sind, dann liegen die sechs Ecken irgend zweier dieser fünf Dreiecke allemal auf einem Kegelschnitt. Die 15 Diagonalpunkte liegen also zu je sechsen auf 10 Kegelschnitten.

sind in meiner Arbeit nicht ausdrücklich erwähnt, ergeben sich aber nach der von mir befolgten Untersuchungsmethode unmittelbar. Die zehn Pascalschen Sechsecke nämlich, welche je sechs Perspektivitätszentren Q zu Ecken haben, ergeben sich, indem man jedes der zehn Brianchonschen Sechsseite B_i (S. 10) an einem Ω-Kegelschnitt polarisiert, dessen zugehörige Dreiecke keine Seite enthalten, die zugleich Seite des Brianchonschen Sechsseites ist; vier solche Ω-Kegelschnitte sind vorhanden, sie liefern alle dasselbe Pascalsche Sechseck. Durch Polarisation von $B_1 = 12 - 23 - 36 - 65 - 54 - 41$ z. B. am Kegelschnitt Ω^{153}_{624} ergibt sich das bei Schröter in der Tabelle (E) enthaltene Pascalsche Sechseck der sechs Punkte Q: 24×13, 13×62, 62×53, 53×64, 64×15, 15×24.

Die zehn Pascalschen Sechsecke, welche durch je sechs Diagonalpunkte S gebildet sind, ergaben sich durch Polarisation der zehn Brianchonschen Sechsseite B_i am Kegelschnitt X (S. 20). Durch Polarisation des oben erwähnten Brianchonschen Sechsseites B_1 z. B. geht das Pascalsche Sechseck der sechs Punkte S hervor: 45×36, 14×56, 12×45, 14×23, 12×36, 23×56.

Ein jedes der Pascalschen Sechsecke, die den beiden erwähnten Gruppen von je zehn Pascalschen Sechsecken angehören, ist somit ein „Pascalsches Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck", wie es später im Kapitel VII ff. definiert und näher untersucht wird.

Das Polarsystem des Kegelschnitts X ist auch von Schröter am Schluß seines zitierten Aufsatzes erwähnt, er hat aber davon keinen Gebrauch gemacht.

VII. Das Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck. Definition und Konstruktion.

Durch Polarisation eines der zehn Brianchonschen Sechsseite B_i eines 10fach Brianchonschen Sechsecks an einem der Ω-Kegelschnitte erhält man ein „Pascalsches Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck". Da die zehn B_i unter einander projektiv verwandt sind, so sind es auch die aus ihnen durch Polarisation hergeleiteten Pascalschen Sechsecke. Wir stellen uns die Aufgabe, ein solches Pascalsches Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck zu untersuchen.

Wir polarisieren das dem Tripel $T_1 = \mathbf{16, 25, 34}$ [1]) entsprechende Brianchonsche Sechsseit

$$\mathbf{12 - 23 - 36 - 65 - 54 - 41}\ ^{1})$$

am Kegelschnitt Ω^{123}_{654}. Alsdann resultiert das Pascalsche Sechseck mit den Ecken

$$\mathbf{1 = 4,\quad 2 = 6,\quad 3 = 65 \times 23,\quad 4 = 3,\quad 5 = 1,\quad 6 = 12 \times 54.}$$

Wir definieren das Pascalsche Sechseck 1 2 3 4 5 6 unabhängig vom 10fach Brianchonschen Sechseck. Drücken wir zu diesem Zweck die Ecken des 10fach Brianchonschen Sechsecks durch die Ecken des Pascalschen Sechsecks aus:

$$\mathbf{1 = 5,\quad 2 = 34 \times 56,\quad 3 = 4,\quad 4 = 1,\quad 5 = 16 \times 23,\quad 6 = 2.}$$

Das Pascalsche Sechseck 1 2 3 4 5 6 ist somit durch die folgenden Geradentripel definiert (S. 9):

(1) $\mathbf{16, 25, 34} = 25,\ 34 \times 56 \rightarrow 16 \times 23,\ 14$
(2) $\mathbf{15, 23, 46} = 5 \rightarrow 16 \times 23,\ 34,\ 12$
(3) $\mathbf{13, 24, 56} = 45,\ 1 \rightarrow 34 \times 56,\ 23$
(4) $\mathbf{12, 34, 56} = 56,\ 14,\ 23.$

Statt des Tripels $T_3 = \mathbf{13, 24, 56}$ können wir das Tripel $T_7 = \mathbf{16, 45, 23} = 25, 16, 34$ einführen; denn aus T_2, T_4, T_7 leitet man leicht wieder T_3 ab.

---

[1]) Die fetten Ziffern bezeichnen die Ecken des 10fach Brianchonschen Sechsecks, die gewöhnlichen hier und im folgenden die Ecken des Pascalschen Sechsecks. Das Wort Tripel soll auch künftig zum Ausdruck bringen, daß drei Geraden durch einen und denselben Punkt gehen oder drei Punkte auf einer und derselben Geraden liegen.

Das Sechseck 1 2 3 4 5 6 ist somit ein Pascalsches Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck, wenn die folgenden vier Geradentripel bestehen:

(1) $25,\ 34 \times 56 \longrightarrow 16 \times 23,\ 14$
(2) $5 \longrightarrow 16 \times 23,\ 34,\ 12$
(3) $25,\ 16,\ 34$
(4) $56,\ 14,\ 23.$

Die Bedingung (1) sagt aus, daß die sechs Punkte 1, 2, . . . 6 auf einem Kegelschnitt liegen. Die Bedingung (2) läßt sich umformen. Das Tripel $5 \longrightarrow 16 \times 23,\ 34,\ 12$ ist mit dem Tripel $5 \longrightarrow 12 \times 34,\ 16,\ 23$ gleichbedeutend. Polarisieren wir das letztere an dem Kegelschnitt Ω^{125}_{436}, so erhalten wir das Punktetripel $34 \times 56,\ 36 \times 12,\ 46 \times 15$.

Wir können jetzt das Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck auch in folgender Weise definieren:

(1) Die sechs Ecken 1, 2, . . . 6 liegen auf einem Kegelschnitt.
(2) Es besteht das Punktetripel $34 \times 56,\ 12 \times 36,\ 15 \times 46$.
(3) Es besteht das Geradentripel 16, 25, 34.
(4) Es besteht das Geradentripel 14, 23, 56.

Schreiten wir nun zur analytischen Definition und Konstruktion unseres Pascalschen Sechsecks.

Aus den Bedingungen (3) und (4) ergibt sich durch Polarisation des Tripels 16, 25, 34 am Kegelschnitt Ω^{125}_{436} das weitere Tripel 12, 36, 45. Der Punkt 12×36 ist folglich mit 12×45 identisch.

Wir betrachten das vollständige Viereck der vier Punkte:

$$A \equiv 12 \times 45, \quad B \equiv 15 \times 46, \quad C \equiv 6, \quad D \equiv 5.$$

Die beiden Gegenseiten AB, CD schneiden sich auf Grund der Bedingung (2) auf der Geraden 34. Die beiden Gegenseiten AD und BC schneiden sich im Punkt 4, d. h. 34 ist die Verbindungsgerade der beiden Nebenecken 4 und $(AB \times CD)$. Nach einem Satz der projektiven Geometrie wird die Verbindungsstrecke zweier Nebenecken eines vollständigen Vierecks vom dritten Paar von Gegenseiten harmonisch geteilt; folglich bestehen die beiden Beziehungen:

$$(4,\ 43 \times 56,\ 51 \times 43,\ 3) = -1$$
$$(54,\ 56,\ 51,\ 53) = -1.$$

Vertauscht man in einem der drei Tripel 14, 23, 56; 12, 36, 45; 16, 34, 25 die Ziffern zyklisch, so erhält man stets eines der beiden anderen. Durch zyklische Vertauschung der Ziffern erhält man daher aus einer bereits abgeleiteten Beziehung weitere richtige Resultate. Aus der letzten obigen harmonischen Relation folgen daher noch die folgenden:

$$(65,\ 61,\ 62,\ 64) = -1$$
$$(16,\ 12,\ 13,\ 15) = -1$$
$$(21,\ 23,\ 24,\ 26) = -1$$
$$(32,\ 34,\ 35,\ 31) = -1$$
$$(43,\ 45,\ 46,\ 42) = -1$$
$$(54,\ 56,\ 51,\ 53) = -1.$$

Ist $(ABCD) = \delta$, so ist bekanntlich $(CBDA) = (ADBC) = \dfrac{\delta - 1}{\delta}$, also $(13,\ 12,\ 15,\ 16) = +2$ und $(32,\ 31,\ 34,\ 35) = +2$.

Wir haben somit die drei Bedingungen:

(I) $(23,\ 21,\ 26,\ 24) = -1$
(II) $(13,\ 12,\ 15,\ 16) = +2$
(III) $(32,\ 31,\ 34,\ 35) = +2.$

Nehmen wir nun 1 2 3 als Koordinatendreieck, so können wir die Gleichungen der Geraden 23, 31, 12, 14, 24 in der Form schreiben:

$$\overline{23}\colon x_1 = 0,\quad \overline{31}\colon x_2 = 0,\quad \overline{12}\colon x_3 = 0,\quad \overline{14}\colon x_2 + x_3 = 0,\quad \overline{24}\colon x_1 + x_3 = 0$$

Der Punkt 4 hat somit die Koordinaten 1, 1, −1 und die Gerade $\overline{34}$ hat die Gleichung

$$\overline{34}\colon x_1 - x_2 = 0.$$

Wegen der obigen Bezeichnung (I) hat $\overline{26}$ die Gleichung:

$$\overline{26}: \quad x_1 - x_3 = 0$$

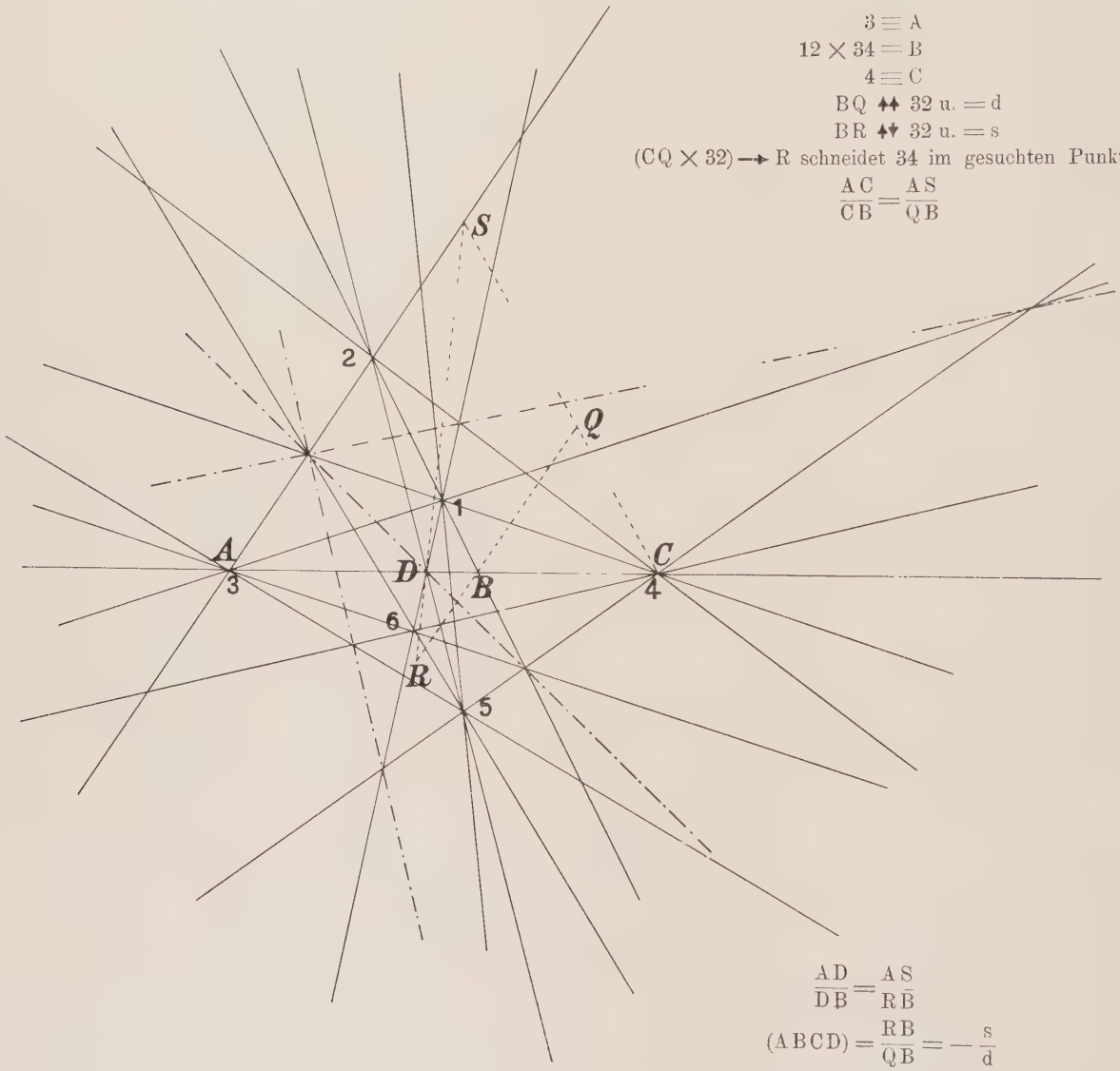
$\overline{16}$ hat eine Gleichung von der Form

$$\overline{16}: \quad x_2 - \rho x_3 = 0$$

und wegen (II) hat dann $\overline{15}$ die Gleichung:

$$\overline{15}: \; x_2 - 2\rho x_3 = 0.$$

Der Punkt 6 hat somit die Koordinate 1, ρ, 1. Wegen (III) hat $\overline{35}$ die Gleichung $2x_1 - x_2 = 0$ und der Punkt 5 somit die Koordinaten ρ, 2ρ, 1.



Wir haben noch zum Ausdruck zu bringen, daß die sechs Punkte 1, 2, ... 6 auf einem Kegelschnitt liegen. Die Gleichung des Kegelschnitts der fünf Punkte 1, 2 . . . 5 ist:

$$2(\rho + 1)(x_1 - x_2)x_3 + x_2(x_1 + x_3) = 0.$$

Da der Punkt 6 auf dem Kegelschnitt liegt, so ergibt sich für ρ die Bedingungsgleichung:

$$\rho^2 - \rho - 1 = 0$$

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\rho' = \mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{d}{s} \text{ (S. 13)}$$

$$\rho'' = \mu' = 1 - \mu$$

Es ergeben sich somit zwei Pascalsche Sechsecke, die aber in projektiver Hinsicht nicht von einander verschieden sind, da wie man leicht zeigt, das eine durch eine lineare Transformation $\sigma x_i = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik} x_k'$ $(i = 1, 2, 3)$ in das andere übergeführt werden kann.

Ein Pascalsches Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck ist somit analytisch definiert durch die sechs Punkte: oder durch die sechs Geradenpaare:

1. 1, 0, 0	$x_2 = 0$,	$x_3 = 0$
2. 0, 1, 0	$x_1 = 0$,	$x_3 = 0$
3. 0, 0, 1	$x_1 = 0$,	$x_2 = 0$
4. 1, 1, -1	$x_2 + x_3 = 0$,	$x_1 + x_3 = 0$
5. μ, 2μ, 1	$2x_1 - x_2 = 0$,	$x_2 - 2\mu x_3 = 0$
6. 1, μ, 1	$x_1 - x_3 = 0$,	$x_2 - \mu x_3 = 0$

Aus den Gleichungen der Verbindungsgeraden 13, 12, 14, 16 folgt sofort die Beziehung

$$(13,\ 12,\ 14,\ 16) = -\frac{1}{\mu} = -\frac{s}{d}$$

wenn man, wie früher, mit s und d Seite und Diagonale eines beliebigen regulären Fünfecks bezeichnet. Diese Beziehung und die auf S. 29 gegebenen Bedingungen (1) . . . (4) erlauben eine einfache Konstruktion eines Pascalschen Sechsecks der fraglichen Art. Wir wählen vier Punkte 1, 2, 3, 4 beliebig so, daß nicht drei in gerader Linie liegen und konstruieren nach Maßgabe der obigen Beziehung die Gerade 16. Die Gerade 25 geht durch den Schnittpunkt 16×34. Die Punkte 14×23, 43×16 bestimmen die Pascalsche Gerade

$$\begin{cases} 14 \times 65 \times 23 \\ 43 \times 52 \times 16 \\ 36 \times 21 \times 45 \end{cases}$$

und man sieht leicht, wie man die Punkte 5 und 6 zu konstruieren hat. Man könnte konstruktiv auch die Pascalsche Gerade $13 \times 45 \rightarrow 32 \times 56 \rightarrow 24 \times 61$ verwerten.

In der vorstehenden Figur (S. 30) ist die angedeutete Konstruktion durchgeführt.

VIII. Besondere Lage von Pascalschen Geraden und Pascalschen Punkten eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck.

Aus der im vorigen Kapitel gegebenen Definition eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck ergeben sich eine Reihe von Folgerungen in Bezug auf die Lage einer Anzahl von Pascalschen Punkten und Pascalschen Geraden.

Bekanntlich gehen durch jeden Pascalschen Punkt eines vollständigen Pascalschen Sechsecks vier Pascalsche Geraden. In unserem speziellen Fall fallen dreimal je drei Pascalsche Punkte zusammen, nämlich

$$\begin{array}{lll} 16 \times 25, & 16 \times 34, & 25 \times 34 \\ 14 \times 23, & 14 \times 56, & 23 \times 56 \\ 12 \times 36, & 12 \times 45, & 36 \times 45. \end{array}$$

Durch jeden der drei Punkte $16 \times 25 \times 34$, $14 \times 23 \times 56$, $12 \times 36 \times 45$ gehen somit $3 \times 4 = 12$ Pascalsche Geraden, welche leicht angegeben werden können. Wie wir gleich sehen werden, fallen aber in jeder dieser drei Gruppen von zwölf Pascalschen Geraden mehrere Pascalsche Geraden zusammen.

Im Punktetripel der Pascalschen Geraden $12 \times 45 \rightarrow 23 \times 56 \rightarrow 34 \times 61$ läßt sich 12×45 durch 12×36, 23×56 durch 56×14 und 34×16 durch 34×25 ersetzen. Es fallen folglich zusammen die beiden Pascalschen Geraden

$$p_1 = \begin{cases} 12 \times 45 \\ 23 \times 56 \\ 34 \times 61 \end{cases} \qquad p_{17} = \begin{cases} 12 \times 63 \\ 25 \times 34 \\ 56 \times 41 \end{cases}$$ [1])

[1]) Die p_i entsprechen den 60 Pascalschen Sechsecken, die man erhält, wenn man die sechs Ziffern 1, 2 . . . 6 in natürliche Rangordnung bringt, fortgesetzt lexikographisch permutiert und jede Ziffernfolge ausläßt, die ein schon in Betracht gezogenes Sechseck definiert.

Durch zyklische Vertauschung der Ziffern (S. 29, Zeile 29) ergeben sich hieraus noch die beiden zusammenliegenden Pascalschen Geraden:

$$p_1 = \begin{cases} 23 \times 56 \\ 34 \times 61 \\ 45 \times 12 \end{cases} \qquad p_{51} = \begin{cases} 23 \times 14 \\ 36 \times 45 \\ 61 \times 52 \end{cases}$$

Es fallen somit die folgenden drei Pascalschen Geraden zusammen:

$$p_1 = \begin{cases} 12 \times 45 \\ 23 \times 56 \\ 34 \times 61 \end{cases} \qquad p_{17} = \begin{cases} 12 \times 63 \\ 25 \times 34 \\ 56 \times 41 \end{cases} \qquad p_{51} = \begin{cases} 23 \times 14 \\ 36 \times 45 \\ 61 \times 52 \end{cases}$$

Vertauscht man im vorstehenden Tripel die Ziffern abermals zyklisch, so ergeben sich dieselben drei Pascalschen Geraden; es existiert somit kein weiteres Tripel zusammenfallender Pascalscher Geraden.

Durch Polarisation des Tripels 16, 25, 34 an den ihm zugeordneten Kegelschnitt Ω_{654}^{123} resultiert das Punktetripel

$$23 \times 54, \quad 64 \times 13, \quad 65 \times 12.$$

Es fallen somit zusammen die drei Pascalschen Geraden

$$p_6 = \begin{cases} 36 \times 41 \\ 65 \times 12 \\ 54 \times 23 \end{cases} \qquad p_{12} = \begin{cases} 42 \times 35 \\ 21 \times 56 \\ 13 \times 64 \end{cases} \qquad p_{29} = \begin{cases} 46 \times 31 \\ 62 \times 15 \\ 23 \times 54 \end{cases}$$

Durch Polarisation desselben Geradentripels am Kegelschnitt Ω_{623}^{154} ergibt sich das Punktetripel

$$54 \times 23, \quad 14 \times 63, \quad 15 \times 62$$

und es fallen folglich zusammen die drei Pascalschen Geraden

$$p_6 = \begin{cases} 36 \times 41 \\ 65 \times 12 \\ 54 \times 23 \end{cases} \qquad p_{46} = \begin{cases} 42 \times 35 \\ 26 \times 51 \\ 63 \times 14 \end{cases} \qquad p_{29} = \begin{cases} 46 \times 31 \\ 62 \times 15 \\ 23 \times 54 \end{cases}$$

Es besteht demnach das folgende Quadrupel zusammenliegender Pascalscher Geraden:

$$p_6 = \begin{cases} 36 \times 41 \\ 65 \times 12 \\ 54 \times 23 \end{cases} \quad p_{12} = \begin{cases} 42 \times 35 \\ 21 \times 56 \\ 13 \times 64 \end{cases} \quad p_{29} = \begin{cases} 46 \times 31 \\ 62 \times 15 \\ 23 \times 54 \end{cases} \quad p_{46} = \begin{cases} 42 \times 35 \\ 26 \times 51 \\ 63 \times 14 \end{cases}$$

Durch fortgesetzte zyklische Vertauschung erhält man hieraus die weiteren zwei Quadrupel von zusammenliegenden Pascalschen Geraden:

$$p_{47} = \begin{cases} 41 \times 52 \\ 16 \times 23 \\ 65 \times 34 \end{cases} \quad p_{57} = \begin{cases} 53 \times 46 \\ 32 \times 61 \\ 24 \times 15 \end{cases} \quad p_{32} = \begin{cases} 51 \times 42 \\ 13 \times 26 \\ 34 \times 65 \end{cases} \quad p_{36} = \begin{cases} 53 \times 46 \\ 31 \times 62 \\ 14 \times 25 \end{cases}$$

$$p_{15} = \begin{cases} 52 \times 63 \\ 21 \times 34 \\ 16 \times 45 \end{cases} \quad p_{21} = \begin{cases} 64 \times 51 \\ 43 \times 12 \\ 35 \times 26 \end{cases} \quad p_{37} = \begin{cases} 62 \times 53 \\ 24 \times 31 \\ 45 \times 16 \end{cases} \quad p_{41} = \begin{cases} 64 \times 51 \\ 42 \times 13 \\ 25 \times 36 \end{cases}$$

Setzt man die zyklische Vertauschung fort, so kommt man wieder auf das erste Quadrupel zurück; weitere Quadrupel von zusammenliegenden Pascalschen Geraden bestehen folglich nicht.

Zu jedem der drei Tripel T_i von Diagonalen, welche das vollständige Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck enthält, gehören vier Paare perspektiver Dreiecke und demzufolge vier Perspektivitätsachsen. Die Perspektivitätsachsen des Tripels 16, 25, 34 sind mit den vier Pascalschen Geraden des ersten der obigen drei Quadrupel identisch. Die vier Pascalschen Geraden des zweiten Quadrupels sind die vier Perspektivitätsachsen des Tripels 12, 36, 45 und die vier Pascalschen Geraden des letzten Quadrupels sind die vier Perspektivitätsachsen des Tripels 14, 23, 56.

Wir haben also den Satz:

I. Wenn sechs Punkte ein Pascalsches Sechseck bilden und drei ihrer Verbindungsgeraden, welche keine Ecke gemein haben, durch einen und denselben Punkt gehen, so fallen die vier Perspektivitätsachsen, welche zu diesem Tripel gehören, zusammen.

Wir wollen diesen grundlegenden Satz noch auf anderem Wege beweisen. Wir setzen also voraus, daß die Punkte 1, 2, ... 6 auf einem Kegelschnitt liegen und drei Verbindungsgeraden der Punkte, etwa 16, 25, 34 durch einen und denselben Punkt gehen. Die zum gegebenen Tripel 16, 25, 34 gehörigen perspektiven Dreiecke sind die folgenden:

1 2 3	6 2 3	1 5 3	1 2 4
6 5 4	1 5 4	6 2 4	6 5 3

und die zugehörigen vier Perspektivitätsachsen sind:

$$12 \times 65 \longrightarrow 23 \times 54 \longrightarrow 31 \times 46$$
$$62 \times 15 \longrightarrow 23 \times 54 \longrightarrow 36 \times 41$$
$$15 \times 62 \longrightarrow 53 \times 24 \longrightarrow 31 \times 46$$
$$12 \times 65 \longrightarrow 24 \times 53 \longrightarrow 41 \times 36$$

Die vier Perspektivitätsachsen lassen sich analytisch darstellen in den Formen:

$$\text{(I)} \quad \Psi^{x12,\,23}_{x65,\,54} \equiv (654)(523)(x12) + (254)(123)(x65) = 0$$
$$\text{(II)} \quad \Psi^{x62,\,23}_{x15,\,54} \equiv (154)(523)(x62) + (254)(623)(x15) = 0$$
$$\text{(III)} \quad \Psi^{x15,\,53}_{x62,\,24} \equiv (624)(253)(x15) + (524)(153)(x62) = 0$$
$$\text{(IV)} \quad \Psi^{x12,\,24}_{x65,\,53} \equiv (653)(524)(x12) + (253)(124)(x65) = 0$$

Auf Grund der gemachten Voraussetzung bestehen die zwei Gleichungen:

$$(465)(412)(325)(316) = (365)(312)(425)(416)\ ^{1})$$
$$(325)(416) = (425)(316) \quad \text{(S. 7)}$$

Durch Multiplikation und nachfolgende Vereinfachung erhält man hieraus die Beziehung:

$$(465)(412)(325)(325) = (425)(425)(365)(312)$$

Es besteht somit, wie man leicht durch Ausrechnen bestätigt, die Identität

$$(253)(124)\,\Psi^{x12,\,23}_{x65,\,54} \equiv (254)(123)\,\Psi^{x12,\,24}_{x65,\,53}$$

Die Achse I fällt somit mit der Achse IV zusammen.

Vertauscht man in dieser Identität 1 mit 6 und 3 mit 4, so folgt die weitere:

$$(254)(623)\,\Psi^{x62,\,24}_{x15,\,53} \equiv (253)(624)\,\Psi^{x62,\,23}_{x15,\,54}$$

Die Achse II fällt mit der Achse III zusammen.

Vertauscht man endlich in der ersten Identität 1 mit 3 und 4 mit 6, so ergibt sich die Identität:

$$(251)(326)\,\Psi^{x32,\,21}_{x45,\,56} \equiv (256)(321)\,\Psi^{x32,\,26}_{x45,\,51}$$

Die Achse I fällt folglich mit der II zusammen.

Damit ist bewiesen, daß alle vier Achsen zusammenfallen.

Sehr leicht läßt sich auch die Umkehrung obigen Satzes I beweisen.

Wir haben noch von der Bedingung (2) S. 29, Gebrauch zu machen. Durch Kombination der Bedingung (2) mit (1) folgt, daß der Punkt 34×56 auf der Pascalschen Geraden

$$p_{11} = \begin{cases} 21 \times 36 \\ 15 \times 64 \\ 53 \times 42 \end{cases}$$

liegen muß. Es besteht somit das folgende Quadrupel von Pascalschen Punkten, die auf einer und derselben Pascalschen Geraden liegen:

$$34 \times 56, \quad 21 \times 36 \quad 15 \times 64, \quad 53 \times 42, \quad \text{Pasc. Ger. } p_{11}$$

Durch fortgesetzte zyklische Vertauschung ergeben sich hieraus die weiteren fünf Quadrupel von je vier Pascalschen Punkten einer und derselben Pascalschen Geraden:

45×61,	32×41,	26×15,	64×53,	Pasc. Ger. p_{53}
56×12,	43×52,	31×26,	15×64,	„ „ p_{34}
61×23,	54×63,	42×31,	26×15,	„ „ p_{39}
12×34,	65×14,	53×42,	31×26,	„ „ p_{38}
23×45,	16×25,	64×53,	42×31,	„ „ p_{35}

[1]) Clebsch-Lindemann, Geometrie, Bd. I, 1. Abteilung, 2. Auflage, p. 286.

Durch den Pascalschen Punkt 34×56 gehen folglich die folgenden fünf Pascalschen Geraden:

$$p_{11} \cdot \begin{cases} 21 \times 36 \\ 15 \times 64, \\ 53 \times 42 \end{cases} \quad p_{31} = \begin{cases} 34 \times 56 \\ 42 \times 61, \\ 25 \times 13 \end{cases} \quad p_{48} = \begin{cases} 34 \times 56 \\ 41 \times 62, \\ 15 \times 23 \end{cases} \quad p_{32} = \begin{cases} 34 \times 65 \\ 42 \times 51, \\ 26 \times 13 \end{cases} \quad p_{47} = \begin{cases} 34 \times 65 \\ 41 \times 52 \\ 16 \times 23 \end{cases}$$

Drücken wir dies symbolisch wie folgt aus:

$$34 \times 56 = \begin{Bmatrix} 21 \times 36 \\ 15 \times 64 \\ 53 \times 42 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 34 \times 56 \\ 42 \times 61 \\ 25 \times 13 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 34 \times 56 \\ 41 \times 62 \\ 15 \times 23 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 34 \times 65 \\ 42 \times 51 \\ 26 \times 13 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 34 \times 65 \\ 41 \times 52 \\ 16 \times 23 \end{Bmatrix} = (p_{11}, p_{31}, p_{48}, p_{32}, p_{47}).$$

Durch fortgesetzte zyklische Vertauschung erhält man die weiteren fünf Identitäten:

$$45 \times 61 = \begin{Bmatrix} 32 \times 41 \\ 26 \times 15 \\ 64 \times 53 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 45 \times 61 \\ 53 \times 12 \\ 36 \times 24 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 45 \times 61 \\ 52 \times 13 \\ 26 \times 34 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 45 \times 16 \\ 53 \times 62 \\ 31 \times 24 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 45 \times 16 \\ 52 \times 63 \\ 21 \times 34 \end{Bmatrix} = (p_{53}, p_9, p_{33}, p_{37}, p_{15})$$

$$56 \times 12 = \begin{Bmatrix} 43 \times 52 \\ 31 \times 26 \\ 15 \times 64 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 56 \times 12 \\ 64 \times 23 \\ 41 \times 35 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 56 \times 12 \\ 63 \times 24 \\ 31 \times 45 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 56 \times 21 \\ 64 \times 13 \\ 42 \times 35 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 56 \times 21 \\ 63 \times 14 \\ 32 \times 45 \end{Bmatrix} = (p_{34}, p_4, p_{10}, p_{12}, p_6)$$

$$61 \times 23 \quad \begin{Bmatrix} 54 \times 63 \\ 42 \times 31 \\ 26 \times 15 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 61 \times 23 \\ 15 \times 34 \\ 52 \times 46 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 61 \times 23 \\ 14 \times 35 \\ 42 \times 56 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 61 \times 32 \\ 15 \times 24 \\ 53 \times 46 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 61 \times 32 \\ 14 \times 25 \\ 43 \times 56 \end{Bmatrix} = (p_{39}, p_{55}, p_{13}, p_{57}, p_{47})$$

$$12 \times 34 = \begin{Bmatrix} 65 \times 14 \\ 53 \times 42 \\ 31 \times 26 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 12 \times 34 \\ 26 \times 45 \\ 63 \times 51 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 12 \times 34 \\ 25 \times 46 \\ 53 \times 61 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 12 \times 43 \\ 26 \times 35 \\ 64 \times 51 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 12 \times 43 \\ 25 \times 36 \\ 54 \times 61 \end{Bmatrix} = (p_{38}, p_{19}, p_{13}, p_{21}, p_{15})$$

$$23 \times 45 = \begin{Bmatrix} 16 \times 25 \\ 64 \times 53 \\ 42 \times 31 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 23 \times 45 \\ 31 \times 56 \\ 14 \times 62 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 23 \times 45 \\ 36 \times 51 \\ 64 \times 12 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 23 \times 54 \\ 31 \times 46 \\ 15 \times 62 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 23 \times 54 \\ 36 \times 41 \\ 65 \times 12 \end{Bmatrix} = (p_{35}, p_{30}, p_5, p_{29}, p_6).$$

Jede dieser sechs Gruppen von fünf Pascalschen Geraden enthält nach früheren Untersuchungen zwei Pascalsche Geraden, die mit noch zwei nicht in der Gruppe vorkommenden Pascalschen Geraden zusammenfallen. Wir haben demnach auf jedem Quadrupel zusammenliegender Pascalscher Geraden zwei Pascalsche Punkte P, von denen ein jeder ein Tripel getrennt liegender Pascalscher Geraden enthält.

Die sechs Punkte P bilden ein 10fach Brianchonsches Sechseck, wie jetzt bewiesen werden soll. Wir bezeichnen die Ecken des 10fach Brianchonschen Sechsecks, aus dem unser Pascalsches Sechseck abgeleitet wurde, wie früher mit fetten Ziffern, die Ecken des Pascalschen Sechsecks mit gewöhnlichen und die Punkte P mit gestrichenen Ziffern:

$$1' = 23 \times 45 = \mathbf{56 \times 13 \times 24}, \quad 2' = 61 \times 23 = \mathbf{5}, \quad 3' = 45 \times 61 = \mathbf{13 \times 45 \times 26}$$
$$4' = 56 \times 12 = \mathbf{12 \times 46 \times 35}, \quad 5' = 34 \times 56 = \mathbf{2}, \quad 6' = 12 \times 34 = \mathbf{23 \times 46 \times 15}.$$

Es ist die Existenz der folgenden vier Geradentripel zu beweisen:

$$\begin{matrix} 1'6', & 2'5', & 3'4' \\ 1'5', & 2'3', & 4'6' \\ 1'3', & 2'4', & 5'6' \\ 1'2', & 3'4', & 5'6' \end{matrix} \quad \text{S. 9.}$$

Es besteht das Tripel **14**, **36**, **25**, welches die beiden perspektiven Dreiecke $\begin{cases} \mathbf{1\,3\,5} \\ \mathbf{4\,6\,2} \end{cases}$ mit der Perspektivitätsachse $\mathbf{13 \times 46 \longrightarrow 35 \times 62 \longrightarrow 51 \times 24}$ bestimmt. Durch Polarisation des vorstehenden Punktetripels am Kegelschnitt Ω_{465}^{132} ergibt sich das Geradentripel

$$\mathbf{25},\ \mathbf{45 \times 13 \longrightarrow 12 \times 46},\ \mathbf{13 \times 65 \longrightarrow 46 \times 23}$$

d. h. das Tripel 2'5', 3'4', 1'6'.

Die drei Geraden 1'5', 2'3', 4'6' sind bezw. identisch mit den Geraden **24**, **45**, **46** und die drei Geraden 1'3', 2'4', 5'6' sind bezw. identisch mit den Geraden **13**, **35**, **23**. Es besteht das Geradentripel **14**, **35**, **26**. Durch Polarisation desselben am Kegelschnitt Ω_{456}^{123} geht es über in das Punktetripel $\mathbf{23 \times 56}$, $\mathbf{45 \times 13}$, $\mathbf{46 \times 12}$, d. h. die drei Geraden **56**, $\mathbf{13 \times 45 \longrightarrow 12 \times 46}$, **23** oder die drei Geraden 1'2', 3'4', 5'6' gehen durch einen und denselben Punkt.

Wir fassen die in diesem Kapitel abgeleiteten Eigenschaften eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck zusammen:

II. Es sind drei Tripel T von zusammenfallenden Pascalschen Punkten oder drei Tripel von Diagonalen vorhanden, die je durch denselben Punkt T hindurchgehen.

III. Es gibt ein Tripel τ zusammenfallender Pascalscher Geraden. Eine jede dieser Pascalschen Geraden enthält aus jedem der drei Tripel T zusammenfallender Pascalscher Punkte einen Pascalschen Punkt. Die drei Tripel T zusammenliegender Pascalscher Punkte liegen somit auf den drei vereinigt liegenden Pascalschen Geraden τ.

IV. Durch jeden der drei Punkte T gehen zwölf Pascalsche Geraden, nämlich die drei zusammenliegenden τ und noch neun diskret liegende.

V. Es sind drei Quadrupel t von zusammenfallenden Pascalschen Geraden vorhanden. Jedem der drei Tripel T zusammenliegender Pascalscher Punkte entsprechen vier perspektive Dreiecke, gebildet von den Ecken des Pascalschen Sechsecks. Die Perspektivitätsachsen dieser Dreiecke sind ein Quadrupel t zusammenfallender Pascalscher Geraden.

VI. Es sind sechs Pascalsche Geraden vorhanden, die je durch einen vierten Pascalschen Punkt P gehen. Jedes der drei Quadrupel t zusammenliegender Pascalscher Geraden enthält zwei dieser sechs Punkte P. Durch jeden Punkt P gehen noch drei getrennt liegende Pascalsche Geraden. Die sechs Punkte P bilden ein 10fach Brianchonsches Sechseck.

IX. Das vollständige Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck. Die Sätze von Steiner, Kirkmann, Cayley, Salmon, Plücker, Bauer.

Das vollständige Pascalsche Sechseck enthält eine Fülle interessanter projektiver Eigenschaften, die durch die Untersuchungen einer Reihe von Autoren zum großen Teil klargelegt wurden. Stellen wir einige der bekannten Sätze[1]) über das Pascalsche Sechseck hier zusammen und wenden wir sie hernach auf das vollständige Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck an.

1. Die 60 Pascalschen Geraden schneiden sich zu je dreien in 20 Punkten A. (Steinersche Punkte.) Satz von Steiner.
2. Die 60 Pascalschen Geraden schneiden sich zu je dreien nicht nur in den 20 Steinerschen Punkten A, sondern auch in 60 Punkten K. (Kirkmannsche Punkte.) Satz von Kirkmann.
3. Die 60 Kirkmannschen Punkte K liegen zu je dreien auf 20 Geraden a. Jede dieser Geraden a enthält auch einen Steinerschen Punkt A. (Cayley-Salmonsche Geraden). Satz von Cayley und Salmon.
4. Die 20 Steinerschen Punkte A liegen zu je vieren auf 15 Geraden b. (Steiner-Plückersche Linien.) Satz von Plücker.
5. Die 20 Cayley-Salmonschen Geraden a gehen zu je vieren durch 15 Punkte B. (Cayley-Steinersche Punkte.) Satz von Steiner.
6. Die sechs Ecken eines Pascalschen Sechsecks bestimmen zehn Paare von Dreiecken 1 2 3, 4 5 6; 1 2 4, 3 5 6; etc. Nach Bauer[1]) sind die Dreiecke eines jeden Paares Polardreiecke eines bestimmten Kegelschnitts, der als Bauerscher Kegelschnitt bezeichnet wird. Der zu den Dreiecken 1 2 3, 4 5 6 gehörige Bauersche Kegelschnitt z. B. wird symbolisch mit $\Psi_{1\,2\,3,\,4\,5\,6}$ bezeichnet. Bauer teilte die 45 Pascalschen Punkte und

[1]) Die Beweise der genannten Sätze und weitere Literatur findet man bei „Clebsch-Lindemann, Geometrie, I. Bd., 1. Abteilung. 2 Auflage.

die 60 Pascalschen Geraden eines Pascalschen Sechsecks im Polarsystem eines Bauerschen Kegelschnitts $\Psi_{i_1 i_2 i_3, k_1 k_2 k_3}$ in folgender Weise ein:

18 Pascalsche Punkte P, die Schnittpunkte von je zwei Verbindungsgeraden ik.

18 Pascalsche Punkte $\mathfrak{P}$, die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden ik mit den Seiten der Dreiecke der Punkte i und k.

9 Pascalsche Punkte II, die Schnittpunkte, in denen sich je zwei Seiten der Dreiecke der Punkte i und k schneiden.

18 Pascalsche Geraden π, zu den Pascalschen Sechsecken gehörend, welche zwei Seiten aus jedem der beiden Dreiecke Δ_i und Δ_k enthalten.

36 Pascalsche Geraden $\mathfrak{p}$, zu den 36 Pascalschen Sechsecken gehörend, die je nur eine Seite aus jedem der Dreiecke Δ_i und Δ_k enthalten.

6 Pascalsche Geraden p, zu den sechs Pascalschen Sechsecken gehörend, die keine Seite aus den beiden Dreiecken Δ_i und Δ_k enthalten.

Nach demselben Autor bestehen folgende Sätze:

Den Punkten P entsprechen die π.

Den Punkten II entsprechen neun Verbindungsgeraden V_{ik}.

Den p entsprechen sechs Kirkmannsche Punkte K.

Die p gliedern sich in zwei Tripel, die je einen Steinerschen Punkt A, A' bestimmen. Die Punkte A, A' sind konjugierte Pole und die ihnen entsprechenden Cayley-Salmonschen Geraden folglich konjugierte Polaren. Die neun Pascalschen Punkte P, welche sich zu je drei auf den drei durch A gehenden p befinden, sind einzeln konjugiert zu den neun Pascalschen Punkten P', welche sich auf den drei durch A' gehenden p' befinden.

Die neun Pascalschen Geraden π, welche zu je drei durch die drei auf a, der Polaren von A, liegenden Kirkmannschen Punkte K gehen, sind einzeln konjugiert zu den neun Pascalschen Geraden π', welche zu je drei durch die drei auf a', der Polaren von A', liegenden Kirkmannschen Punkte K' gehen.

Den 18 Pascalschen Punkten $\mathfrak{P}$ entsprechen 18 Geraden λ, d. h. Verbindungsgeraden je einer Dreiecksecke mit je einem Pascalschen Punkt II.

Den 36 Pascalschen Geraden $\mathfrak{p}$ entsprechen 36 Punkte Λ, d. h. Punkte, durch die je zwei Geraden λ und eine Gerade π gehen.

Die außer den zwei Punkten A, A' existierenden übrigen 18 Steinerschen Punkte $\mathfrak{A}$ sind bestimmt durch je zwei $\mathfrak{p}$ und eine π; diesen 18 Punkten $\mathfrak{A}$ entsprechen 18 Geraden $\mathfrak{a}$, die durch je zwei Punkte Λ und einen Punkt P bestimmt sind.

Die Ecken und Seiten der beiden Polardreiecke Δ_i, Δ_k, die Punkte P, II, K, die Geraden π, V, p bilden ein in sich reziprokes und geschlossenes Polarsystem.

Auf jeder Pascalschen Geraden liegt bekanntlich ein Steinerscher Punkt. Auf der Pascalschen Geraden

$$p_1 = \begin{cases} 12 \times 45 \\ 23 \times 56 \\ 34 \times 61 \end{cases}$$

liegt z. B. der Steinersche Punkt

$$A_1 = \begin{Bmatrix} 12 \times 45 \\ 23 \times 56 \\ 34 \times 61 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 54 \times 63 \\ 41 \times 32 \\ 16 \times 25 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 21 \times 36 \\ 14 \times 65 \\ 43 \times 52 \end{Bmatrix}$$

der kurz durch das Symbol

$$A_1 = \begin{Bmatrix} 12 & 45 & 36 \\ 56 & 23 & 14 \\ 34 & 61 & 25 \end{Bmatrix}$$

bezeichnet wird.

In unserem speziellen Fall liegen die in dieses Symbol eingehenden Pascalschen Geraden vereinigt; sie bilden das im vorigen Kapitel erwähnte Tripel τ. Der Steinersche Punkt A_1 ist somit unbestimmt.

Suchen wir jetzt die zusammenfallenden Steinerschen Punkte auf. Durch jeden der drei Punkte T gehen, wie im letzten Kapitel gezeigt wurde, neun diskret liegende Pascalsche Geraden. Durch den Punkt $T_1 = 16 \times 25 \times 34$ gehen die neun Pascalschen Geraden

$$p_{27} = \left\{\begin{matrix} 16 \times 52 \\ 64 \times 23 \\ 45 \times 31 \end{matrix}\right\} \qquad p_{34} = \left\{\begin{matrix} 25 \times 34 \\ 51 \times 46 \\ 13 \times 62 \end{matrix}\right\} \qquad p_{60} = \left\{\begin{matrix} 61 \times 43 \\ 15 \times 32 \\ 54 \times 26 \end{matrix}\right\}$$

$$p_{35} = \left\{\begin{matrix} 16 \times 25 \\ 64 \times 53 \\ 42 \times 31 \end{matrix}\right\} \qquad p_{18} = \left\{\begin{matrix} 25 \times 43 \\ 56 \times 31 \\ 64 \times 12 \end{matrix}\right\} \qquad p_{7} = \left\{\begin{matrix} 16 \times 34 \\ 65 \times 42 \\ 53 \times 21 \end{matrix}\right\}$$

$$p_{45} = \left\{\begin{matrix} 16 \times 52 \\ 63 \times 24 \\ 35 \times 41 \end{matrix}\right\} \qquad p_{50} = \left\{\begin{matrix} 25 \times 43 \\ 51 \times 36 \\ 14 \times 62 \end{matrix}\right\} \qquad p_{58} = \left\{\begin{matrix} 61 \times 34 \\ 15 \times 42 \\ 53 \times 26 \end{matrix}\right\}$$

Die vorstehenden drei Tripel von Pascalschen Geraden bestimmen die drei Steinerschen Punkte

$$A_2 = \left\{\begin{matrix} 16 & 52 & 34 \\ 23 & 64 & 15 \\ 45 & 31 & 26 \end{matrix}\right\} \qquad A_3 = \left\{\begin{matrix} 16 & 25 & 34 \\ 53 & 64 & 12 \\ 42 & 31 & 56 \end{matrix}\right\} \qquad A_4 = \left\{\begin{matrix} 16 & 52 & 34 \\ 24 & 63 & 15 \\ 35 & 41 & 26 \end{matrix}\right\}$$

Die Steinerschen Punkte A_2, A_3, A_4, fallen somit mit dem Punkt $T_1 = 16 \times 25 \times 34$ zusammen.

Durch zweimalige zyklische Vertauschung erhält man aus vorstehenden drei Steinerschen Punkten die beiden weiteren Tripel von zusammenfallenden Steinerschen Punkten:

$$A_5 = \left\{\begin{matrix} 21 & 63 & 45 \\ 34 & 15 & 26 \\ 56 & 42 & 31 \end{matrix}\right\} \qquad A_6 = \left\{\begin{matrix} 21 & 36 & 45 \\ 64 & 15 & 23 \\ 53 & 42 & 61 \end{matrix}\right\} \qquad A_7 = \left\{\begin{matrix} 21 & 63 & 45 \\ 35 & 14 & 26 \\ 46 & 52 & 31 \end{matrix}\right\}$$

$$A_8 = \left\{\begin{matrix} 32 & 14 & 56 \\ 45 & 26 & 31 \\ 61 & 53 & 42 \end{matrix}\right\} \qquad A_9 = \left\{\begin{matrix} 32 & 41 & 56 \\ 15 & 26 & 34 \\ 64 & 53 & 12 \end{matrix}\right\} \qquad A_{10} = \left\{\begin{matrix} 32 & 14 & 56 \\ 46 & 25 & 31 \\ 51 & 63 & 42 \end{matrix}\right\}$$

Die Punkte A_5, A_6, A_7 liegen im Punkt $T_2 = 12 \times 36 \times 45$ und die Punkte A_8, A_9, A_{10} im Punkt $T_3 = 14 \times 23 \times 56$ vereinigt.

Untersuchen wir nun die spezielle Lage der übrigen zehn Punkte A. Auf einer jeden einem Quadrupel t angehörigen Pascalschen Geraden liegt ein Steinerscher Punkt. Jedes Quadrupel t enthält somit vier Steinersche Punkte. In der Geraden t z. B., welche die vier Pascalschen Geraden p_{47}, p_{57}, p_{32}, p_{36} (S. 32) enthält, liegen die vier Punkte A:

$$A_1' = \left\{\begin{matrix} 16 & 23 & 45 \\ 34 & 65 & 12 \\ 52 & 41 & 36 \end{matrix}\right\}, \qquad A_6' = \left\{\begin{matrix} 16 & 23 & 45 \\ 35 & 64 & 12 \\ 42 & 51 & 36 \end{matrix}\right\}, \qquad A_5' = \left\{\begin{matrix} 15 & 24 & 36 \\ 43 & 56 & 12 \\ 62 & 31 & 45 \end{matrix}\right\}, \qquad A_7' = \left\{\begin{matrix} 13 & 26 & 45 \\ 64 & 35 & 12 \\ 52 & 41 & 36 \end{matrix}\right\}$$

Durch zweimalige zyklische Vertauschung erhält man hieraus die beiden weiteren Quadrupel von Punkten A, die je in den Geraden t der Quadrupel p_{15}, p_{21}, p_{37}, p_{41} und p_6, p_{12}, p_{29}, p_{46} liegen:

$$A_1' = \left\{\begin{matrix} 21 & 34 & 56 \\ 45 & 16 & 23 \\ 63 & 52 & 41 \end{matrix}\right\}, \qquad A_9' = \left\{\begin{matrix} 21 & 34 & 56 \\ 46 & 15 & 23 \\ 53 & 62 & 41 \end{matrix}\right\}, \qquad A_8' = \left\{\begin{matrix} 26 & 35 & 41 \\ 54 & 61 & 23 \\ 13 & 42 & 56 \end{matrix}\right\}, \qquad A_{10}' = \left\{\begin{matrix} 24 & 31 & 56 \\ 15 & 46 & 23 \\ 63 & 52 & 41 \end{matrix}\right\}$$

$$A_1' = \left\{\begin{matrix} 32 & 45 & 61 \\ 56 & 21 & 34 \\ 14 & 63 & 52 \end{matrix}\right\}, \qquad A_2' = \left\{\begin{matrix} 32 & 45 & 61 \\ 51 & 26 & 34 \\ 64 & 13 & 52 \end{matrix}\right\}, \qquad A_3' = \left\{\begin{matrix} 31 & 46 & 52 \\ 65 & 12 & 34 \\ 24 & 53 & 61 \end{matrix}\right\}, \qquad A_4' = \left\{\begin{matrix} 35 & 42 & 61 \\ 26 & 51 & 34 \\ 14 & 63 & 52 \end{matrix}\right\}$$

Die 20 Steinerschen Punkte lassen sich somit in folgender Weise einteilen:

I. Ein unbestimmter Steinerscher Punkt, der Punkt, in dem sich die drei zusammenliegenden Pascalschen Geraden τ schneiden und der Steinersche Punkt, den die drei Quadrupel t zusammenliegender Pascalscher Geraden miteinander gemein haben.

II. Eine Gruppe von neun Steinerschen Punkten, die zu je dreien in den drei Punkten T des Geradentripels τ vereinigt liegen.

III. Eine Gruppe von neun Steinerschen Punkten, die getrennt zu dreien auf den Quadrupeln t zusammenliegender Pascalscher Geraden liegen.

Wie man sieht, verteilen sich alle Steinerschen Punkte auf die drei Punkte T und die drei Geraden t.

Die drei Pascalschen Geraden p_1, p_{17}, p_{51}, welche den Steinerschen Punkt A_1 bestimmen (S. 36) gehören dem Polarsystem des Bauerschen Kegelschnitts $\Psi_{135,246}$ an; ihnen entsprechen polar drei Kirkmannsche Punkte $K_{1,1}'$, $K_{1,17}'$, $K_{1,51}'$, welche auf der Cayley-Salmonschen Geraden des dem Punkt A_1 polar konjugierten Punktes A_1' liegen. Nun fallen aber, wie wir gesehen haben, die drei Pascalschen Geraden p_1, p_{17}, p_{51} zusammen. Die drei Kirkmannschen Punkte:

$$K_{1,1}' \equiv \left\{\begin{matrix}53\times46\\31\times62\\14\times25\end{matrix}\right\}\times\left\{\begin{matrix}64\times51\\42\times13\\25\times36\end{matrix}\right\}\times\left\{\begin{matrix}15\times62\\53\times24\\36\times41\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}53\ 46\ 24\\62\ 31\ \underline{15}\\14\ 25\ \underline{36}\end{matrix}\right\}$$ [1])

$$K_{1,17}' \equiv \left\{\begin{matrix}35\times64\\51\times42\\16\times23\end{matrix}\right\}\times\left\{\begin{matrix}46\times31\\62\times15\\23\times54\end{matrix}\right\}\times\left\{\begin{matrix}13\times42\\35\times26\\54\times61\end{matrix}\right\} \equiv \left\{\begin{matrix}35\ 64\ 31\\42\ 51\ \underline{62}\\16\ 23\ \underline{45}\end{matrix}\right\}$$

$$K_{1,51}' \equiv \left\{\begin{matrix}46\times15\\62\times53\\21\times34\end{matrix}\right\}\times\left\{\begin{matrix}51\times42\\13\times26\\34\times65\end{matrix}\right\}\times\left\{\begin{matrix}24\times53\\46\times31\\65\times12\end{matrix}\right\} \equiv \left\{\begin{matrix}46\ 15\ 13\\\underline{53}\ 62\ 24\\\underline{21}\ 34\ 56\end{matrix}\right\}$$

fallen folglich zusammen und liegen im Punkt A_1'. Die Cayley-Salmonsche Gerade $a_1' \equiv K_{1,1}' \rightarrow K_{1,17}' \rightarrow K_{1,51}'$, die dem Punkt A_1 polar entspricht, wird folglich unbestimmt.

Durch den Punkt $T_1 = 16\times25\times34$ gehen die zwölf Pascalschen Geraden

$$p_{58} = \left\{\begin{matrix}62\times35\\24\times51\\43\times16\end{matrix}\right\} \qquad p_{34} = \left\{\begin{matrix}26\times31\\64\times15\\43\times52\end{matrix}\right\} \qquad p_{35} = \left\{\begin{matrix}53\times64\\31\times42\\16\times25\end{matrix}\right\}$$

$$p_{60} = \left\{\begin{matrix}62\times45\\23\times51\\34\times16\end{matrix}\right\} \qquad p_{50} = \left\{\begin{matrix}26\times41\\63\times15\\34\times52\end{matrix}\right\} \qquad p_{51} = \left\{\begin{matrix}54\times63\\41\times32\\16\times25\end{matrix}\right\}$$

$$p_{45} = \left\{\begin{matrix}63\times24\\35\times41\\52\times16\end{matrix}\right\} \qquad p_{17} = \left\{\begin{matrix}36\times21\\65\times14\\52\times43\end{matrix}\right\} \qquad p_{7} = \left\{\begin{matrix}42\times65\\21\times53\\16\times34\end{matrix}\right\}$$

$$p_{27} = \left\{\begin{matrix}64\times23\\45\times31\\52\times16\end{matrix}\right\} \qquad p_{18} = \left\{\begin{matrix}46\times21\\65\times13\\52\times34\end{matrix}\right\} \qquad p_{1} = \left\{\begin{matrix}32\times65\\21\times54\\12\times43\end{matrix}\right\}$$

Die drei Pascalschen Geraden einer jeden Zeile bestimmen einen Kirkmannschen Punkt K. Im Punkt $T_1 = 16\times25\times34$ liegen somit vereinigt die vier Kirkmannschen Punkte:

$$K_{1,6} \equiv \left\{\begin{matrix}26\ 35\ 46\\15\ 24\ 13\\\underline{34}\ 61\ 25\end{matrix}\right\}, \quad K_{3,12} \equiv \left\{\begin{matrix}26\ 45\ 36\\15\ 23\ 14\\\underline{34}\ 61\ 25\end{matrix}\right\}, \quad K_{2,29} \equiv \left\{\begin{matrix}36\ 24\ 56\\14\ 35\ 12\\\underline{25}\ 61\ 34\end{matrix}\right\}, \quad K_{4,46} \equiv \left\{\begin{matrix}46\ 23\ 56\\13\ 45\ 12\\\underline{52}\ 61\ 43\end{matrix}\right\}$$

Durch zweimalige zyklische Vertauschung der Ziffern erhält man die beiden weiteren Quadrupel zusammenfallender Kirkmannscher Punkte:

$$K_{1,17} = \left\{\begin{matrix}31\ 46\ 51\\26\ 35\ 24\\\underline{45}\ 12\ 36\end{matrix}\right\}, \quad K_{6,57} \equiv \left\{\begin{matrix}31\ 56\ 41\\26\ 34\ 25\\\underline{45}\ 12\ 36\end{matrix}\right\}, \quad K_{5,32} \equiv \left\{\begin{matrix}41\ 35\ 61\\25\ 46\ 23\\\underline{36}\ 12\ 45\end{matrix}\right\}, \quad K_{7,36} \equiv \left\{\begin{matrix}51\ 34\ 61\\24\ 56\ 23\\63\ 12\ 54\end{matrix}\right\}$$

$$K_{1,15} \equiv \left\{\begin{matrix}42\ 51\ 62\\31\ 46\ 35\\\underline{56}\ 23\ 41\end{matrix}\right\}, \quad K_{9,21} \equiv \left\{\begin{matrix}42\ 61\ 52\\31\ 45\ 36\\\underline{56}\ 23\ 41\end{matrix}\right\}, \quad K_{8,37} \equiv \left\{\begin{matrix}52\ 46\ 12\\36\ 51\ 34\\\underline{41}\ 23\ 56\end{matrix}\right\}, \quad K_{10,41} \equiv \left\{\begin{matrix}62\ 45\ 12\\35\ 61\ 34\\\underline{14}\ 23\ 65\end{matrix}\right\}$$

[1]) Im Symbol $K_{i,k}$ bezeichnet i den Index des Steinerschen Punktes, der mit $K_{i,k}$ in derselben Cayley-Salmonschen Geraden a_i liegt. Der zweite Index k ist die Nummer der Pascalschen Geraden, die dem Kirkmannschen Punkt $K_{i,k}$ in Bezug auf einen bestimmten Bauerschen Kegelschnitt polar entspricht.

In den Punkten $T_2 = 12 \times 36 \times 45$ und $T_3 = 14 \times 23 \times 56$ liegen somit ebenfalls je vier Kickmannsche Punkte vereinigt und die Cayley-Salmonsche Gerade

$$A_1 \longrightarrow K_{1,6} \longrightarrow K_{1,47} \longrightarrow K_{1,15}$$

fällt folglich mit dem Tripel τ zusammen.

Den in $T_1 = 16 \times 25 \times 34$ vereinigt liegenden drei Steinerschen Punkten A_2, A_3, A_4 (S. 37) entsprechen polar in Bezug auf die Bauerschen Kegelschnitte

$$\Psi_{124,\,356} \qquad \Psi_{145,\,236} \qquad \Psi_{123,\,456}$$

bezw. die drei Cayley-Salmonschen Geraden

$$a_2' \equiv \left\{\begin{matrix} 13\ 64\ 25 \\ 45\ 32\ 16 \\ 26\ 51\ 34 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 13\ 64\ 25 \\ 24\ 35\ 36 \\ 65\ 12\ 14 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 36\ 14\ 35 \\ \overline{45}\ 32\ 16 \\ 12\ 65\ 24 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 35\ 24\ 65 \\ 14\ 36\ 12 \\ \overline{26}\ 51\ 34 \end{matrix}\right\}$$

$$a_3' \equiv \left\{\begin{matrix} 12\ 65\ 43 \\ 53\ 24\ 16 \\ 64\ 31\ 25 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \overline{12}\ 65\ 43 \\ 45\ 23\ 26 \\ 63\ 14\ 15 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 26\ 15\ 23 \\ \overline{53}\ 24\ 16 \\ 14\ 63\ 45 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 23\ 45\ 63 \\ 15\ 26\ 14 \\ \overline{64}\ 31\ 25 \end{matrix}\right\}$$

$$a_4' \equiv \left\{\begin{matrix} 14\ 63\ 25 \\ 35\ 42\ 16 \\ 62\ 51\ 43 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \overline{14}\ 63\ 25 \\ 23\ 45\ 46 \\ 65\ 12\ 13 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 46\ 13\ 45 \\ \overline{35}\ 42\ 16 \\ 12\ 65\ 23 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 45\ 23\ 65 \\ 13\ 46\ 12 \\ \overline{62}\ 51\ 43 \end{matrix}\right\}$$

Jeder der vorstehenden drei Steinerschen und neun Kirkmannschen Punkte enthält eine der vier zusammenliegenden Pascalschen Geraden p_6, p_{12}, p_{29}, p_{46}. Die drei vorstehenden Cayley-Salmonschen Geraden fallen somit mit dem Quadrupel t der genannten vier Pascalschen Geraden zusammen.

Durch zweimalige zyklische Vertauschung der Ziffern erhält man zwei weitere Tripel Cayley-Salmonscher Geraden derselben Art; das eine fällt mit dem Quadrupel p_{47}, p_{57}, p_{32}, p_{36}, das andere mit dem Quadrupel p_{15}, p_{21}, p_{37}, p_{41} (S. 32) zusammen.

Fassen wir die vorstehenden Resultate zusammen:

IV. Im Steinerschen Punkt, den die drei Quadrupel t gemein haben, liegen drei Kirkmannsche Punkte vereinigt.

V. Die Cayley-Salmonsche Gerade, auf der die unter IV. genannten drei Kirkmannschen Punkte liegen, wird unbestimmt.

VI. In jedem der drei Punkte T, welche je ein Tripel zusammenliegender Pascalscher Punkte enthalten, liegen vier Kirkmannsche Punkte vereinigt.

VII. Eine Cayley-Salmonsche Gerade fällt mit dem Trippel τ zusammen und in jedem der drei Quadrupel t liegen drei Cayley-Salmonsche Geraden vereinigt.

VIII. In einer jeden Geraden, welche ein Quadrupel t enthält, befinden sich neun diskret liegende Kirkmannsche Punkte.

Zwischen den Pascalschen Geraden und Kirkmannschen Punkten einerseits, den Steinerschen Punkten und Cayley-Salmonschen Geraden andererseits besteht vollständige Dualität. Wir heben folgende Sätze hervor:

IX. Es ist ein Tripel τ zusammenfallender Pascalscher Geraden vorhanden.

X. Es sind drei Quadrupel t zusammenfallender Pascalscher Geraden vorhanden.

XI. Durch jeden der drei Punkte T gehen außer den drei zusammenliegenden Pascalschen Geraden τ noch neun diskret liegende.

XII. In jedem der drei Punkte T liegen drei Steinersche Punkte vereinigt.

IX'. Es ist ein Tripel $\mathfrak{T}$ zusammenfallender Kirkmannscher Punkte vorhanden.

X'. Es sind drei Quadrupel T zusammenfallender Kirkmannscher Punkte vorhanden.

XI'. Auf jeder der drei Geraden t befinden sich außer den drei zusammenliegenden Kirkmannschen Punkten $\mathfrak{T}$ noch neun diskret liegende.

XII'. Auf jeder der drei Geraden t liegen drei Cayley-Salmonsche Geraden vereinigt.

XIII. Der Steinersche Punkt, durch den die drei zusammenliegenden Pascalschen Geraden τ gehen, ist unbestimmt.

XIV. Ein Steinerscher Punkt fällt mit den drei Kirkmannschen Punkten $\mathfrak{T}$ zusammen.

XV. Auf jeder der drei Geraden t liegen außer dem Steinerschen Punkt, den diese miteinander gemein haben, noch drei Steinersche Punkte.

XIII'. Die Cayley-Salmonsche Gerade, auf der die drei zusammenliegenden Kirkmannschen Punkte $\mathfrak{T}$ liegen, ist unbestimmt.

XIV'. Eine Cayley-Salmonsche Gerade fällt mit den drei Pascalschen Geraden τ zusammen.

XV'. Durch jeden der drei Punkte T gehen außer der Cayley-Salmonschen Geraden, die diese gemein haben, noch drei Cayley-Salmonsche Geraden.

Im Polarsystem des Kegelschnitts $\Psi_{135,246}$ entsprechen den sechs Punkten P

$$23 \times 45, \quad 56 \times 12$$
$$34 \times 56, \quad 16 \times 23$$
$$16 \times 45, \quad 12 \times 34$$

welche ein 10fach Brianchonsches Sechseck bestimmen (S. 34), die sechs Geraden π

$\pi_{34} = 46 \times 15 \rightarrow 26 \times 13 \rightarrow 25 \times 34 \rightarrow 56 \times 12$, $\pi_{35} = 13 \times 24 \rightarrow 35 \times 46 \rightarrow 52 \times 61 \rightarrow 23 \times 45$

$\pi_{39} = 15 \times 26 \rightarrow 13 \times 24 \rightarrow 36 \times 45 \rightarrow 16 \times 23$, $\pi_{11} = 35 \times 24 \rightarrow 46 \times 15 \rightarrow 12 \times 63 \rightarrow 34 \times 56$

$\pi_{38} = 35 \times 24 \rightarrow 26 \times 13 \rightarrow 14 \times 65 \rightarrow 12 \times 34$, $\pi_{53} = 35 \times 46 \rightarrow 15 \times 26 \rightarrow 14 \times 23 \rightarrow 16 \times 45$

welche somit ein 10fach Pascalsches Sechsseit bestimmen. Wie man aus vorstehender Zusammenstellung ersieht, sind je zwei in einer Zeile stehende P bezw. π einander polar konjugiert. Wir haben demnach noch die beiden weiteren dualen Sätze:

XVI. Jede der drei Geraden t enthält zwei in Bezug auf einen Bauerschen Kegelschnitt polar konjugierte Pascalsche Punkte P. Die sechs Punkte P der drei Geraden t bilden ein 10fach Brianchonsches Sechseck.

XVI'. Jeder der drei Punkte T enthält zwei in Bezug auf einen Bauerschen Kegelschnitt polar konjugierte Pascalsche Geraden π. Die sechs Geraden π der drei Punkte T bilden ein 10fach Pascalsches Sechsseit.

Wir haben uns noch mit den 15 Steiner-Plückerschen Linien b und den ihnen dual entsprechenden Cayley-Steinerschen Punkten B zu befassen.

Einer Steiner-Plückerschen Linie gehören die vier Steinerschen Punkte an:

$$A_1 = \left\{\begin{matrix} 34 & 61 & 25 \\ 12 & 45 & 36 \\ 56 & 23 & 14 \end{matrix}\right\}, \quad A_5 = \left\{\begin{matrix} 43 & 51 & 26 \\ 12 & 36 & 45 \\ 65 & 24 & 13 \end{matrix}\right\}, \quad A_9 = \left\{\begin{matrix} 34 & 51 & 26 \\ 12 & 46 & 35 \\ 65 & 23 & 14 \end{matrix}\right\}, \quad A_3 = \left\{\begin{matrix} 43 & 61 & 25 \\ 12 & 35 & 46 \\ 56 & 24 & 13 \end{matrix}\right\}$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man die Steiner-Plückersche Linie der vier Steinerschen Punkte:

$$A_1 = \left\{\begin{matrix} 45 & 12 & 36 \\ 23 & 56 & 41 \\ 61 & 34 & 25 \end{matrix}\right\}, \quad A_8 = \left\{\begin{matrix} 54 & 62 & 31 \\ 23 & 41 & 56 \\ 16 & 35 & 24 \end{matrix}\right\}, \quad A_2 = \left\{\begin{matrix} 45 & 62 & 31 \\ 23 & 51 & 46 \\ 16 & 34 & 25 \end{matrix}\right\}, \quad A_6 = \left\{\begin{matrix} 54 & 12 & 36 \\ 23 & 46 & 51 \\ 61 & 35 & 24 \end{matrix}\right\}$$

Vertauscht man in den vorstehenden vier quadratischen Schemas Steinerscher Punkte 1 mit 6, 2 mit 3, 4 mit 5, so ergeben sich abermals vier Steinersche Punkte, die eine Steiner-Plückersche Linie bestimmen:

$$A_1 = \left\{\begin{matrix} 25 & 16 & 34 \\ 63 & 54 & 21 \\ 41 & 32 & 65 \end{matrix}\right\}, \quad A_7 = \left\{\begin{matrix} 52 & 46 & 31 \\ 63 & 21 & 54 \\ 14 & 35 & 62 \end{matrix}\right\}, \quad A_{10} = \left\{\begin{matrix} 25 & 46 & 31 \\ 63 & 51 & 24 \\ 14 & 32 & 65 \end{matrix}\right\}, \quad A_4 = \left\{\begin{matrix} 52 & 16 & 34 \\ 63 & 24 & 51 \\ 41 & 35 & 62 \end{matrix}\right\}$$

Auf S. 37 haben wir gezeigt, daß in den Punkten $T_1 = 16 \times 25 \times 34$, $T_2 = 12 \times 36 \times 45$, $T_3 = 14 \times 23 \times 56$ bezw. vereinigt liegen die folgenden drei Tripel Steinerscher Punkte:

$$A_2 A_3 A_4, \qquad A_5 A_6 A_7, \qquad A_8 A_9 A_{10}.$$

Eine jede der oben angegebenen drei Steiner-Plückerschen Linien enthält aus jedem dieser vorstehenden Punktetripel einen Steinerschen Punkt und da die T_i auf einer und derselben Geraden τ liegen, die auch den unbestimmten Punkt A_1 enthält (S. 37), folgt der Satz:

XVII. In der Verbindungsgeraden τ der drei Punkte T_i liegen drei Steiner-Plückersche Linien b vereinigt.

Sehen wir nun zu, ob es Steiner-Plückersche Linien gibt, die je mit einem Quadrupel t zusammenfallen.

Vertauscht man in den weiter oben angesetzten Symbolen der Steinerschen Punkte A_1, A_5, A_9, A_3, 2 mit 6, so ergibt sich die Steiner-Plückersche Linie der vier Steinerschen Punkte:

$$A_1' = \left\{\begin{matrix} 34\ 21\ 65 \\ 16\ 45\ 32 \\ 52\ 63\ 14 \end{matrix}\right\}, \quad A_2' = \left\{\begin{matrix} 43\ 51\ 26 \\ 16\ 32\ 45 \\ 25\ 64\ 13 \end{matrix}\right\}, \quad A_4' = \left\{\begin{matrix} 34\ 51\ 26 \\ 16\ 42\ 35 \\ 25\ 63\ 14 \end{matrix}\right\}, \quad A_3' = \left\{\begin{matrix} 43\ 21\ 65 \\ 16\ 35\ 42 \\ 52\ 64\ 13 \end{matrix}\right\}$$

welche, wie wir S. 37 gezeigt haben, auf der Geraden t des Quadrupels $p_6, p_{12}, p_{29}, p_{46}$ liegen. Die Steiner-Plückersche Linie der vorstehenden vier Steinerschen Punkte fällt folglich mit der genannten t zusammen. Durch zweimalige zyklische Vertauschung ergeben sich aus den vorstehenden vier Steinerschen Punkten die Steiner-Plückerschen Linien der beiden Quadrupel:

$$A_1', A_9', A_{10}', A_8'$$
$$A_1', A_6', A_7', A_5'.$$

Die erste fällt mit dem Quadrupel t der zusammenliegenden Pascalschen Geraden $p_{15}, p_{21}, p_{37}, p_{41}$, die zweite mit dem Quadrupel t der zusammenliegenden Pascalschen Geraden $p_{47}, p_{57}, p_{32}, p_{36}$ zusammen (S. 37).

Wir haben das Resultat:

XVIII. In einer jeden der drei Geraden t liegt eine Steiner-Plückersche Linie.

Bestimmen wir endlich noch die in einem Punkt T sich schneidenden Steiner-Plückerschen Linien.

Nach der Theorie des allgemeinen Pascalschen Sechsecks gehen durch jeden Steinerschen Punkt drei Steiner-Plückersche Linien; durch den Steinerschen Punkt A_2 z. B. die oben schon angegebene Linie des Quadrupels A_2, A_1, A_8, A_6 und die zwei Steiner-Plückerschen Linien der beiden Quadrupel

$$A_2, A_4, A_5', A_9'$$
$$A_2, A_3, A_7', A_{10}'$$

die aus den Steinerschen Symbolen der Quadrupel A_1, A_5, A_9, A_3 und A_1, A_7, A_{10}, A_4 durch die Vertauschungen 2—3, 4—5 hervorgehen.

Den in T_1 zusammenliegenden drei Steinerschen Punkten A_2, A_3, A_4 entsprechen je die drei Tripel Steiner-Plückerscher Linien:

$$\begin{matrix} A_2\,A_6\ A_1\ A_8 \\ A_2\,A_3\ A_7'\ A_{10}' \\ A_2\,A_4\ A_5'\ A_9' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_3\,A_1\ A_5\ A_9 \\ A_3\,A_4\ A_8'\ A_6' \\ A_3\,A_2\ A_7'\ A_{10}' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_4\,A_{10}\,A_7\ A_1 \\ A_4\,A_3\ A_8'\ A_6' \\ A_4\,A_2\ A_5'\ A_9' \end{matrix}$$

Das erste Tripel erhält man aus den Steinerschen Schemas der weiter oben angegebenen drei Quadrupel $A_1\,A_5\,A_9\,A_3$, $A_1\,A_8\,A_2\,A_6$, $A_1\,A_7\,A_{10}\,A_4$ durch die Vertauschungen 2—3, 4—5; das zweite durch die Vertauschung 3—4 und das dritte durch die Vertauschung 2—5.

Durch den Punkt $T_1 = 16 \times 25 \times 34 = (A_2\,A_3\,A_4)$ gehen somit außer den drei zusammenliegenden oben bereits erwähnten, noch drei weitere Steiner-Plückersche Linien. Da die drei Punkte T in projektiver Hinsicht durchaus dieselbe Rolle spielen, folgt der Satz:

XIX. Durch jeden Punkt T gehen nicht nur drei zusammenliegende Steiner-Plückersche Linien, sondern auch drei diskret liegende.

Aus der zwischen den 15 Steiner-Plückerschen Linien b und den 15 Cayley-Steinerschen Punkten B bestehenden Dualität ergeben sich nun die folgenden Sätze:

XX. In der Verbindungsgeraden τ der drei Punkte T liegen drei Steiner-Plückersche Linien b vereinigt.

XX'. Im Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ der drei Geraden t liegen drei Cayley-Steinersche Punkte B vereinigt.

XXI. In einer jeden der drei Geraden t liegt eine Steiner-Plückersche Linie.

XXII. Durch jeden Punkt T gehen außer den drei unter XX. genannten zusammenliegenden, noch drei weitere Steiner-Plückersche Linien.

XXI'. In einem jeden der drei Punkte T liegt ein Cayley-Steinerscher Punkt B.

XXII'. Auf jeder Geraden t liegen außer den drei unter XX'. genannten zusammenliegenden noch drei weitere Cayley-Steinersche Punkte B.

X. Die zehn Bauerschen Kegelschnitte eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck.

Leiten wir nun auf Grund der gewonnenen Resultate einige weitere Koinzidenzen ab und prüfen wir die spezielle Lage der zehn Bauerschen Kegelschnitte, die sich ergeben wird.

Im speziellen Fall eines Pascalschen Sechsecks im 10fach Brianchonschen Sechseck lassen sich die Bauerschen Kegelschnitte Ψ in folgender Weise einteilen:

(I)	$\Psi_{123,\,456}$,	$\Psi_{126,\,345}$,	$\Psi_{156,\,234}$
(II)	$\Psi_{124,\,356}$,	$\Psi_{146,\,235}$,	$\Psi_{125,\,346}$
	$\Psi_{134,\,256}$,	$\Psi_{136,\,245}$,	$\Psi_{145,\,236}$
(III)		$\Psi_{135,\,246}$	

Eine jede der beiden Gruppen (I) und (II) ist dadurch ausgezeichnet, daß ein jeder der ihr angehörigen Kegelschnitte in sich selbst oder in einen anderen der Gruppe übergeht, wenn man irgend eine der den Tripeln 16, 25, 34; 14, 23, 56; 12, 36, 45 entsprechenden Vertauschungen 1—6, 2—5, 3—4; 1—4, 2—3, 5—6; 1—2, 3—6, 4—5 vornimmt, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man die Ziffern zyklisch vertauscht. Der Kegelschnitt (III) ist dadurch eigentümlich, daß er stets in sich selbst übergeht, wenn man eine der angegebenen Vertauschungen vornimmt. Hieraus schließen wir, daß die durch die Kegelschnitte einer Gruppe bestimmten Polarsysteme untereinander projektiv verwandt sind und es daher genügt, irgend einen jeder Gruppe herauszugreifen, etwa die Kegelschnitte:

$$\Psi_{123,\,456}, \qquad \Psi_{124,\,356}, \qquad \Psi_{135,\,246}$$

Durch Polarisation der zusammenfallenden und der übrigen Elemente unseres speziellen Sechsecks an einem der vorstehenden Bauerschen Kegelschnitte ergeben sich Resultate, die schon auf anderem Weg gefunden wurden und eine Fülle von weiteren neuen, die sich namentlich auch auf die auf S. 36 erwähnten Elemente λ, Λ beziehen. Wir beschränken uns auf die Untersuchung der Koinzidenzen, welche uns näheren Aufschluß über die gegenseitige Lage der Bauerschen Kegelschnitte geben.

Es entsprechen sich polar folgende Punkte und Geraden:

I. In Bezug auf $\Psi_{123,\,456}$

T_3
- 14×23 . . . . . $23 \times 56 \longrightarrow 1$
- 14×56 . . . . . $23 \times 56 \longrightarrow 4$
- 23×56 . . . . . 14, Tangente in T_3

T_2
- 36×12 . . . . . $12 \times 45 \longrightarrow 3$
- 36×45 . . . . . $12 \times 45 \longrightarrow 6$
- 12×45 . . . . . 36, Tangente in T_2

II. In Bezug auf $\Psi_{124,\,356}$

T_3
- 14×23 . . . . . $2 \longrightarrow 14 \times 56$
- 56×23 . . . . . $3 \longrightarrow 14 \times 56$
- 56×14 . . . . . 23, Tangente in T_3

T_2
- 12×45 . . . . . $4 \longrightarrow 12 \times 36$
- 36×45 . . . . . $5 \longrightarrow 12 \times 36$
- 12×36 . . . . . 45, Tangente in T_2.

Durch fortgesetzte zyklische Vertauschung erhalten wir für die Kegelschnitte der Gruppe I und II das Schema:

Kegelschnitt	Tangenten	Bezügliche Berührungspunkte
I. $\Psi_{123,\,456}$	14, 36	$14 \times 23 \times 56$, $36 \times 12 \times 45$
$\Psi_{234,\,561}$	25, 41	$25 \times 34 \times 61$, $41 \times 23 \times 56$
$\Psi_{345,\,612}$	36, 52	$36 \times 45 \times 12$, $52 \times 34 \times 61$
II. $\Psi_{124,\,356}$	23, 45	$14 \times 56 \times 23$, $12 \times 36 \times 45$
$\Psi_{235,\,461}$	34, 56	$25 \times 61 \times 34$, $23 \times 41 \times 56$
$\Psi_{346,\,512}$	45, 61	$36 \times 12 \times 45$, $34 \times 52 \times 61$
$\Psi_{451,\,623}$	56, 12	$41 \times 23 \times 56$, $45 \times 63 \times 12$
$\Psi_{562,\,134}$	61, 23	$52 \times 34 \times 61$, $56 \times 14 \times 23$
$\Psi_{613,\,245}$	12, 34	$63 \times 45 \times 12$, $61 \times 25 \times 34$

Aus der vorstehenden Zusammenstellung ergeben sich die Sätze:

I. Ein jeder der drei Bauerschen Kegelschnitte der Gruppe I wird von jedem der beiden anderen in einem Punkt T berührt. Die gemeinsame Tangente eines jeden Paares sich berührender Kegelschnitte der Gruppe I ist eine der drei Diagonalen des Pascalschen Sechsecks, welche sich im Berührungspunkt T schneiden und zwar jene, welche nicht Seite eines der vier Polardreiecke ist, die den beiden Kegelschnitten entsprechen.

II. Ein jeder der sechs Bauerschen Kegelschnitte der Gruppe II wird von zwei der übrigen in je einem Punkt T berührt. Die gemeinsame Tangente eines jeden Paares sich berührender Kegelschnitte der Gruppe II ist eine der drei Diagonalen des Pascalschen Sechsecks, welche sich im Berührungspunkt T schneiden und zwar jene, welche nicht Seite eines der vier Polardreiecke ist, die den beiden Kegelschnitten entsprechen.

Untersuchen wir nun die Natur des Kegelschnitts $\Psi_{135,\,246}$. Seine Gleichung in Bezug auf das Seite 29 definierte Koordinatendreieck 1 2 3 ist:

$$(\mu + 1)\,x_1^2 - (\mu + 1)\,x_1 x_2 + x_2^2 - (\mu - 1)\,x_2 x_3 + x_3^2 = 0$$

oder, wenn man auf das Polardreieck 1 5 3 transformiert und demgemäß die Substitution

$$\tau x_1 = \mu\,(x_1' + x_2')$$
$$\tau x_2 = 2\,\mu\,x_2'$$
$$\tau x_3 = x_2' - x_3'$$

ausführt,

$$\mu^4 x_1'^2 + \mu^2 x_2'^2 + x_3'^2 = 0.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ordnet dieser Kegelschnitt Träger koinzidenter Elemente paarweise einander zu, nämlich die drei Geraden t und die drei Punkte T. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

IV. Der Bauersche Kegelschnitt, welcher die drei Träger t der Quadrupel zusammenfallender Pascalscher Geraden den drei Trägern T der Quadrupel von je drei Pascalschen Punkten P und einem Kirkmannschen Punkt K, die zusammenliegen, zuordnet, ist imaginär.

Es drängt sich die Aufgabe auf, die Schnittpunkte und das gemeinsame Polardreieck von je zwei der neun reellen Kegelschnitte Ψ zu bestimmen. Wir lösen sie zunächst für die beiden Kegelschnitte $\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{124,\,356}$. Diese beiden Kegelschnitte schneiden sich, wie wir bewiesen haben, in den Punkten $T_2 = 12 \times 36 \times 45$, $T_3 = 14 \times 23 \times 56$.

Da nach der Polarentheorie der Kegelschnitte ein Kegelschnitt jede Seite eines Polardreiecks harmonisch teilt, so genügen die zwei Schnittpunkte C und D, in denen die beiden Kegelschnitte die Verbindungsgeraden 12 und 56 schneiden, den Beziehungen

$$(2,\ 1,\ T_2,\ D) = -1;\ (5,\ 6,\ T_3,\ C) = -1.$$

Aus den harmonischen Eigenschaften der beiden vollständigen Vierecke 5 6 3 2 und 1 4 5 2 folgern wir, daß C auf $26 \times 35 \longrightarrow 25 \times 36$ und D auf $15 \times 24 \longrightarrow 14 \times 25$ liegt. Die erste der beiden Geraden ist die dem Punkt T_3 in Bezug auf den imaginären Kegelschnitt $\Psi_{135,\,246}$ entsprechende Gerade t_3, in welcher die vier Pascalschen Geraden p_{15}, π_{21}, π_{37}, π_{41} vereinigt liegen, die zweite ist die dem Punkt T_2 in Bezug auf $\Psi_{135,\,246}$ zugeordnete Gerade t_2, in welcher die vier Pascalschen Geraden p_{47}, π_{57}, π_{32}, π_{36} vereinigt liegen. Projizieren wir die harmonischen Punktequadrupel 5, 6, T_3, C und 2, 1, T_2, D von T_1 aus, so resultieren die beiden harmonischen Strahlenquadrupel

$$52,\ 61,\ T_1\,T_3,\ T_1\,C, \qquad 52,\ 61,\ T_1\,T_2,\ T_1\,D$$

Nun ist aber $T_1\,T_3$ mit $T_1\,T_2$ identisch (Satz III, S. 35), folglich fallen auch die Strahlen $T_1\,C$ und $T_1\,D$ zusammen. Die Verbindungsgerade der gemeinsamen Schnittpunkte C und D der beiden Kegelschnitte geht somit durch T_1. (Fig. S. 46.)

Mit Hilfe des vollständigen Vierecks der Punkte 16×23, 2, 5, 6 zeigt man, daß die vier Strahlen 52, 61, $T_1\,T_3$, $T_1 \longrightarrow [26 \times (5 \longrightarrow 23 \times 16)]$ ein harmonisches Quadrupel bilden, die Verbindungsgerade C D also mit der Geraden $T_1 \longrightarrow [26 \times (5 \longrightarrow 23 \times 16)]$ identisch ist. Die Punkte C und D lassen sich somit auf mehrfache Weise konstruieren.

Für die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks der beiden Kegelschnitte findet man nun leicht die drei Punkte 12×56, $16 \times 34 \times 25$, $(23 \times 45 \longrightarrow 12 \times 56) \times 34$. 12×56 ist der Punkt, den die Diagonalen der Tripel T_2 und T_3 bestimmen, welche nicht Tangenten der beiden Kegelschnitte sind; $16 \times 34 \times 25$ ist der Punkt T_1, durch den die Kegelschnitte nicht gehen; der dritte Punkt ist der Schnittpunkt, in dem die dem Punkt T_1 in Bezug auf $\Psi_{135,\,246}$ zugeordnete Gerade t_1 die Verbindungsgerade derjenigen Ecken schneidet, welche auf keiner der beiden Verbindungsgeraden liegen, welche die erste Ecke des Polardreiecks bilden. Durch fünfmalige zyklische Vertauschung erheben sich aus dem Kegelschnittspaar $\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{124,\,356}$ fünf weitere derselben Art.

Die so erhaltenen sechs Kegelschnittspaare sind nicht die einzigen, welche sich in je vier getrennt liegenden Schnittpunkten schneiden. Die Gruppe II enthält drei Paare derselben Art, von denen ein jedes aus einem anderen durch zyklische Vertauschung sich ableiten läßt. Ein solches Paar ist $\Psi_{124,\,356}$, $\Psi_{145,\,236}$.

Fassen wir zusammen:

V. Es gibt neun Paare Bauerscher Kegelschnitte, die sich je in vier reellen, getrennt liegenden Schnittpunkten schneiden, nämlich in zwei Punkten T und den beiden Punkten, die bestimmt sind durch die beiden Geraden t, die den genannten T in Bezug auf den imaginären Bauerschen Kegelschnitt entsprechen und jenen Diagonalen der Tripel ebenderselben Punkte T, welche nicht Tangenten der beiden Kegelschnitte sind. Die beiden letzteren Schnittpunkte liegen auf einer und derselben Geraden, welche durch den dritten Punkt T geht, der außer den beiden genannten T existiert.

Suchen wir nun die Bauerschen Kegelschnittpaare, welche sich berühren und noch zwei reelle Schnittpunkte gemein haben. Ein solches Paar sind die beiden Kegelschnitte $\Psi_{123,\,456}$ und $\Psi_{234,\,561}$ der Gruppe I. Die Verbindungsstrecken 23 und 56 werden von jedem der beiden Kegelschnitte harmonisch geteilt. Beide Kurven gehen durch denselben auf 23 und 56 gelegenen Teilpunkt $T_3 = 23 \times 56 \times 14$; also müssen sie sich auf 23 bezw. auf 56 abermals in einem Punkt E bezw. C schneiden. Die Punkte E und C genügen den Beziehungen $(2, 3, T_3, E) = (5, 6. T_3, C) = -1$.

Im vollständigen Viereck der vier Punkte 16×45, 23×16, 45×23, 12×34 teilt das Paar von Gegenseiten $16 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34$, $23 \times 16 \longrightarrow 45 \times 23 \equiv 23$ die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte der beiden anderen Paare von Gegenseiten harmonisch; die beiden Schnittpunkte sind $(16 \times 45 \longrightarrow 23 \times 45) \times (23 \times 16 \longrightarrow 12 \times 34)$; $(16 \times 45 \longrightarrow 23 \times 16) \times (23 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34)$ d. h.

$$45 \times (23 \times 16 \longrightarrow 12 \times 34); \quad 16 \times (23 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34)$$

Wegen der Bedingung (2), S. 29, oben, geht die Gerade $23 \times 16 \longrightarrow 12 \times 34$ durch die Ecke 5. Die Gerade $23 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34$ ist die Gerade $\mathbf{15 \times 23 \times 46 \longrightarrow 24 \times 13 \times 65 \longrightarrow 45 \times 12}$ des zum Pascalschen Sechseck gehörigen 10fach Brianchonschen Sechsecks; sie wird gefunden, wenn man das Tripel **15**, **24**, **36** am Kegelschnitt Ω^{123}_{546} polarisiert. Die Gerade $23 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34$ geht so-

mit durch den Punkt $\mathbf{45 \times 12 = 6}$ und die Gerade $16 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34$ bestimmt auf 56 den gesuchten Schnittpunkt C. Diese Gerade geht auch durch 24×13, da die Pascalschen Geraden p_{15}, p_{37} zusammenliegen (S. 32) und ist somit die Verbindungsgerade der beiden Nebenecken 24×13, 12×34 des Vierecks der Punkte 1, 2, 3, 4; sie teilt zusammen mit dem Punkt $T_3 = 14 \times 23 \times 56$ die Verbindungsgerade 23 harmonisch. Die beiden getrennt liegenden Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte liegen somit auf dem Träger t des Quadrupels der vier zusammenliegenden Pascalschen Geraden p_{15}, p_{37}, p_{21}, p_{41} und sind folgenderweise definiert:

$$C = (16 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34) \times 56$$
$$E = (16 \times 45 \longrightarrow 12 \times 34) \times 23$$

Durch zweimalige zyklische Vertauschung der Ziffern ergeben sich aus dem Paar $\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{234,\,561}$ die zwei getrennt liegenden Schnittpunkte von je zwei weiteren Kegelschnittspaaren der Gruppe I. Die Schnittpunkte der beiden Paare liegen auf den Trägern t der beiden anderen Quadrupel zusammenfallender Pascalscher Geraden.

Aus der Gruppe II haben wir ebenfalls Paare von Kegelschnitten Ψ, die sich in einem Punkt T berühren und außerdem in zwei reellen Schnittpunkten schneiden; z. B. die Kegelschnitte $\Psi_{124,\,356}$, $\Psi_{125,\,346}$, welche sich im Punkt $T_2 = 12 \times 36 \times 45$ in der gemeinsamen Tangente 45 berühren und sich, wie man unschwer erkennt, in den Punkten $12 \times (24 \times 15 \longrightarrow 14 \times 25)$, $36 \times (24 \times 15 \longrightarrow 14 \times 25)$ schneiden. Durch zyklische Vertauschung der Ziffern ergeben sich fünf weitere Paare derselben Art.

Wir haben den Satz:

VI. Es gibt neun Paare Bauerscher Kegelschnitte, die sich je in einer Geraden eines Tripels T, welche gemeinsame Tangente ist, berühren und sich außerdem in zwei reellen Schnittpunkten schneiden, nämlich in den Punkten, die bestimmt sind durch die beiden Diagonalen des Pascalschen Sechsecks, welche außer der gemeinsamen Tangente durch den genannten Berührungspunkt T gehen und den Träger t eines Quadrupels zusammenfallender Pascalscher Geraden, welcher T in Bezug auf den imaginären Bauerschen Kegelschnitt polar entspricht.

Betrachten wir nun die Kegelschnitte $\Psi_{124,\,356}$, $\Psi_{146,\,235}$ der Gruppe II; sie schneiden sich in den Punkten $T_3 = 14 \times 23 \times 56$ und $14 \times (24 \times 13 \longrightarrow 12 \times 34)$, was man leicht aus der Betrachtung der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks 1 2 3 4 erkennt. Prüfen wir, ob weitere reelle Schnittpunkte vorhanden sind. Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind:

$$\Psi_{146,\,235} \equiv \mu^2 x_1^2 - 4 x_1 x_2 + x_2^2 + 2(\mu - 1) x_1 x_3 - x_3^2 = 0$$
$$\Psi_{124,\,356} \equiv \mu^2 x_1^2 - x_2^2 + 2\mu^2 x_1 x_3 - 2 x_2 x_3 - x_3^2 = 0.$$

Wenn vier reelle Schnittpunkte vorhanden wären, so müßte das Kegelschnitts-Büschel $\Psi_{146,\,235} - \lambda \Psi_{124,\,356} = 0$ drei reelle zerfallene Kurven II. Ordnung enthalten, d. h. die kubische Gleichung

$$\mu^4 \lambda^3 - \mu^4 \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

welche die entsprechenden drei λ-Werte liefert, müßte drei reelle Wurzeln haben. Die Wurzeln sind aber 1, $\frac{i}{\mu^2}$, $-\frac{i}{\mu^2}$ $(i = \sqrt{-1})$. Die beiden Kurven schneiden sich somit nur in den angegebenen zwei reellen Punkten.

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich fünf weitere Kegelschnittpaare derselben Art.

Wir haben bereits sämtliche Paare Bauerscher Kegelschnitte berücksichtigt, die nur Kegelschnitte aus einer der beiden Gruppen I und II enthalten und ferner sechs von den 18 Paaren, die aus jeder Gruppe je einen Kegelschnitt enthalten. Da im ganzen 36 Paare vorhanden sind, so verbleiben noch 12 Paare, die aus jeder Gruppe einen Kegelschnitt enthalten; zwei solcher Paare sind die folgenden: $\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{146,\,235}$ und $\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{125,\,346}$. Die ersten beiden Kegelschnitte schneiden sich in $T_3 = 14 \times 23 \times 56$ und im Punkt $23 \times (13 \times 24 \longrightarrow 12 \times 34) = 23 \times t$ $(p_{15}, \pi_{21}, \pi_{37}, \pi_{11})$; die beiden letzteren in Punkt $T_2 = 12 \times 36 \times 45$ und im Punkt $12 \times (15 \times 24 \longrightarrow 14 \times 25) = 12 \times t$ $(p_{47}, \pi_{32}, \pi_{36}, \pi_{57})$. Ganz in analoger Weise, wie oben bei Betrachtung der Kegelschnitte $\Psi_{146,\,235}$, $\Psi_{124,\,356}$ überzeugt man sich, daß keines der beiden Paare weitere reelle Schnittpunkte gemein hat. Durch zyklische Vertauschung ergeben sich aus jedem der beiden Paare fünf weitere derselben Art.

Hiermit sind die Schnittpunkte sämtlicher 36 Paare Bauerscher Kegelschnitte bestimmt.

Fassen wir die letzten Resultate zusammen:

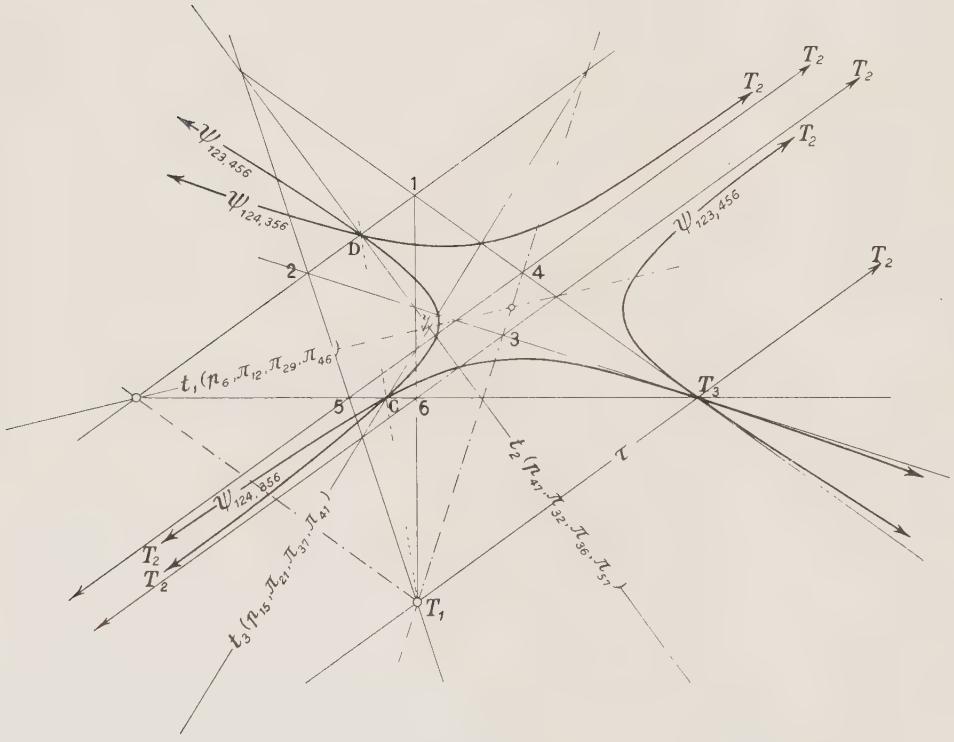
VII. Es gibt 18 Paare Bauerscher Kegelschnitte, die je nur zwei reelle, getrennt liegende Schnittpunkte gemein haben, nämlich einen Punkt T und den Punkt, in dem die diesem T in Bezug auf den imaginären Kegelschnitt zugeordnete Gerade t die Gerade des Tripels T schneidet, welche nicht Tangente eines der beiden Kegelschnitte ist.

Sämtliche Schnittpunkte der neun reellen Bauerschen Kegelschnitte verteilen sich auf die drei Punkte T und die neun Schnittpunkte, welche bestimmt sind durch je drei Geraden eines Tripels T und die dem Träger dieses Tripels T in Bezug auf den imaginären Bauerschen Kegelschnitt zugeordnete Gerade t.

Als Gesamtresultat sämtlicher Kapitel, die sich auf unser spezielles Pascalsches Sechseck beziehen, können wir feststellen, daß die drei Punkte T und die drei Geraden t als Träger koinzidenter Elemente eine ausgezeichnete Rolle spielen.

$\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{124,\,356}$.

(Kapitel X, Satz V.)



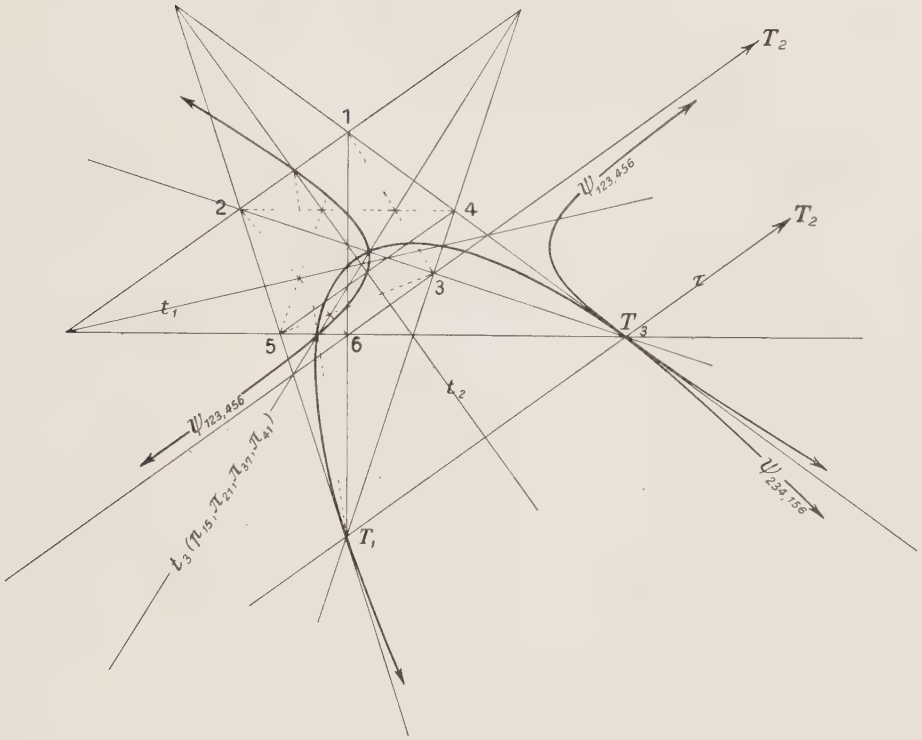
Kegelschnittspaare derselben Art:

$\Psi_{234,\,561}$,	$\Psi_{235,\,461}$
$\Psi_{345,\,612}$,	$\Psi_{346,\,512}$
$\Psi_{456,\,123}$,	$\Psi_{451,\,623}$
$\Psi_{561,\,234}$,	$\Psi_{562,\,134}$
$\Psi_{612,\,345}$,	$\Psi_{613,\,245}$

$\Psi_{124,\,356}$,	$\Psi_{145,\,236}$
$\Psi_{235,\,461}$,	$\Psi_{256,\,341}$
$\Psi_{346,\,512}$,	$\Psi_{361,\,452}$

$\Psi_{123,\,456}$, $\Psi_{234,\,156}$.

(Kapitel X, Satz VI.)

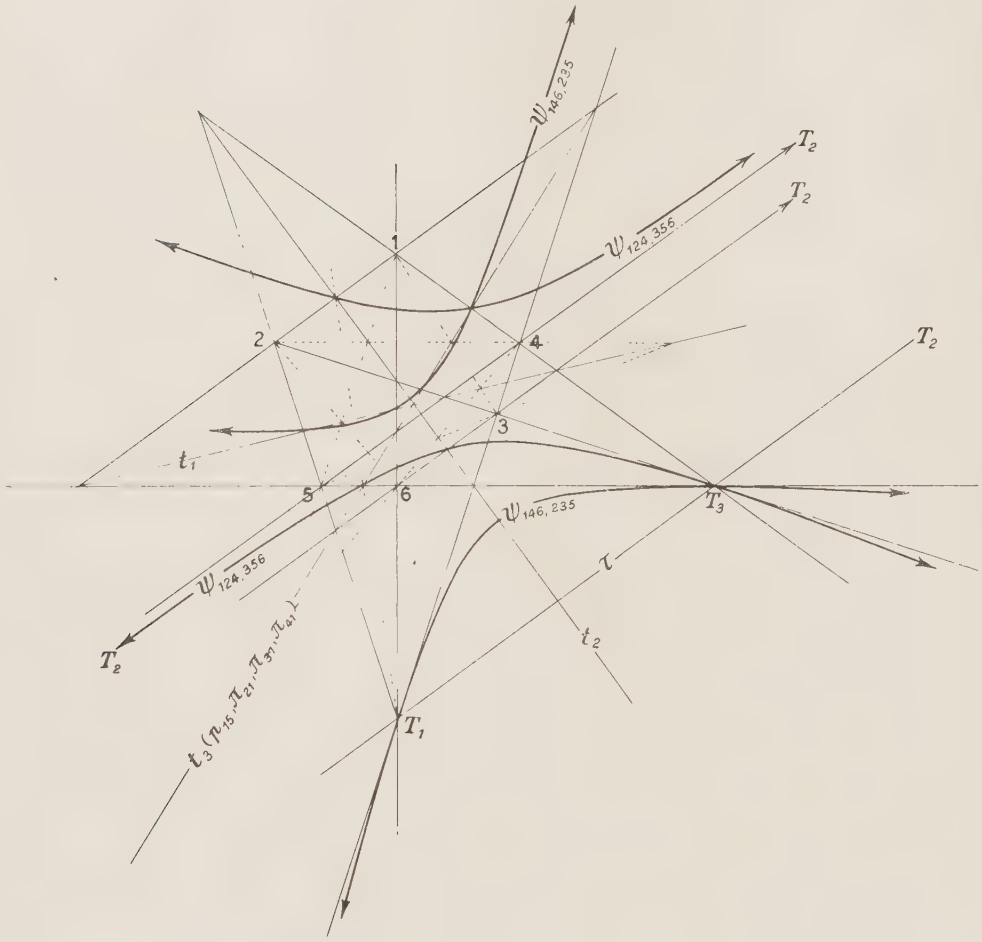


Kegelschnittspaare derselben Art: $\Psi_{234,\,561}$, $\Psi_{345,\,261}$
$\Psi_{345,\,612}$, $\Psi_{456,\,312}$

$\Psi_{124,\,356}$, $\Psi_{125,\,346}$
$\Psi_{235,\,461}$, $\Psi_{236,\,451}$
$\Psi_{346,\,512}$, $\Psi_{341,\,562}$
$\Psi_{451,\,623}$, $\Psi_{452,\,613}$
$\Psi_{562,\,134}$, $\Psi_{563,\,124}$
$\Psi_{613,\,245}$, $\Psi_{614,\,235}$

$\Psi_{121,\,356}$, $\Psi_{146,\,235}$.

(Kapitel X, Satz VII.)



Kegelschnittspaare derselben Art:

$\Psi_{235,\,461}$,	$\Psi_{251,\,346}$	$\Psi_{123,\,456}$,	$\Psi_{146,\,235}$	$\Psi_{123,\,456}$,	$\Psi_{125,\,346}$
$\Psi_{346,\,512}$,	$\Psi_{362,\,451}$	$\Psi_{234,\,561}$,	$\Psi_{251,\,346}$	$\Psi_{234,\,561}$,	$\Psi_{236,\,451}$
$\Psi_{461,\,623}$,	$\Psi_{413,\,562}$	$\Psi_{345,\,612}$,	$\Psi_{362,\,451}$	$\Psi_{345,\,612}$,	$\Psi_{341,\,562}$
$\Psi_{562,\,134}$,	$\Psi_{524,\,613}$	$\Psi_{456,\,123}$,	$\Psi_{413,\,562}$	$\Psi_{456,\,123}$,	$\Psi_{452,\,613}$
$\Psi_{613,\,245}$,	$\Psi_{635,\,124}$	$\Psi_{561,\,234}$,	$\Psi_{524,\,613}$	$\Psi_{561,\,234}$,	$\Psi_{563,\,124}$
		$\Psi_{612,\,345}$,	$\Psi_{635,\,124}$	$\Psi_{612,\,345}$,	$\Psi_{614,\,235}$

Lebenslauf.

Ich wurde am 25. Dezember 1879 in Zürich als Sohn des Ingenieurs Theodor Lutz geboren. Meine Vorbereitung für das Universitätsstudium erwarb ich mir im Großherzogtum Baden in den Realschulen zu Bruchsal und Karlsruhe und im Realgymnasium zu Karlsruhe, woselbst ich im Juli 1900 das Abiturienten-Examen bestand. Ich wählte als Fachstudium Mathematik und Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Geographie) und studierte zu diesem Zwecke in der Zeit vom Herbst 1901 bis Frühjahr 1906 an den Universitäten Freiburg i. B. (5 Semester), München (3 Semester), Heidelberg (1 Semester). Mit besonderer Vorliebe widmete ich mich dem Studium der projektiven Geometrie; ich erhielt dazu sehr wertvolle Anregungen, namentlich von den Herren Professoren Geheimrat Dr. F. Lindemann in München, Dr. Alfred Loewy in Freiburg i. B., Dr. K. Doehlemann in München. Herr Geheimrat Dr. Lindemann hat mir die vorliegende Arbeit vorgeschlagen, insbesondere den Teil, der sich auf das Pascalsche Sechseck im 10fach Brianchonschen Sechseck bezieht. Herrn Geheimrat Dr. Lindemann und allen meinen übrigen Lehrern, die mein Mathematik-Studium gefördert haben, sei an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen. Im März 1906 bestand ich mein Staatsexamen vor der Großherzogl. Bad. Oberschulbehörde und wurde gleich darauf am Gymnasium zu Karlsruhe verwendet. Ferner war ich praktisch tätig an der Höheren Mädchenschule mit Gymnasialabteilung in Karlsruhe, an der Realschule in Singen a. H., an der Oberrealschule in Pforzheim und zuletzt an der Oberrealschule in Karlsruhe. Im Winter-Semester 1906/07 war ich neben meiner Schultätigkeit Assistent für Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe und leitete im Sommer-Semester 1907 daselbst einen Übungskurs in den Grundlehren der höheren Mathematik. Als Frucht meiner praktischen Lehrtätigkeit konnte ich 1909 ein Lehrbuch über „Analytische Geometrie der Ebene“ veröffentlichen. — Zurzeit befinde ich mich im Dienst der Regierung der Republik Panamá. Durch Kontrakt auf fünf Jahre (1910—1915), der durch Vermittlung des Auswärtigen Amtes in Berlin im Oktober 1910 abgeschlossen wurde, bin ich verpflichtet, am „Instituto Nacional“ der Republik Panamá den mathematischen Unterricht nach modernen deutschen Unterrichtsmethoden zu organisieren. Im Oktober 1910 erhielt ich von der Großherzogl. Bad. Oberschulbehörde die Erlaubnis, in den Auslandsdienst überzutreten mit der Bestimmung, daß mir die in Panamá zugebrachte fünfjährige Dienstzeit für meine künftige Beförderung im badischen Schuldienst angerechnet wird.